

Б. И. Шахтарин, А. В. Черныш  
**ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ПОИСКА  
ПО ВРЕМЕНИ ШУМОПОДОБНЫХ СИГНАЛОВ**

*Рассмотрены характеристики систем предварительной синхронизации (поиска по времени) шумоподобных сигналов. Основными показателями эффективности систем такого рода являются: вероятность успешного завершения поиска, среднее время до его окончания, а также ряд других характеристик, в том числе представляющих собой комбинации указанных параметров. Рассмотрены передаточные функции систем поиска. На основе аппарата марковских цепей, а также теории направленных графов и порождающих функций проведен детальный анализ эффективности выбранных систем поиска шумоподобных сигналов.*

Широкое распространение телекоммуникационных систем — это отличительная черта нашего времени. По беспроводным каналам управляют транспортными средствами, промышленными комплексами, передают различного рода сообщения. В ближайшем будущем следует ожидать увеличения темпов внедрения в повседневную жизнь беспроводных технологий передачи информации и управления. В результате все более возрастает загруженность применяемых радиоканалов, что, отчасти, явилось причиной применения изначально военной технологии расширения спектра в гражданском секторе. Системы, основанные на этом принципе, имеют повышенную помехоустойчивость, более низкую спектральную плотность мощности (СПМ) а также менее восприимчивы к интерференции, нежели классические узкополосные системы. Эти, а также ряд других преимуществ, позволили создать на базе систем с шумоподобными сигналами (ШПС) широко применяемые сети CDMA, IEEE 802.11x и др.

В условиях все более широкого применения беспроводных технологий связи, и, в частности систем с ШПС, остаются актуальными задачи построения быстрых и надежных алгоритмов синхронизации. В качестве критериев эффективности таких алгоритмов, как правило, применяют вероятность успешного завершения процедуры синхронизации и среднее время до окончания синхронизации. В настоящей статье рассмотрена предварительная (грубая) синхронизация по времени, которую чаще называют поиском. Для оценки эффективности алгоритмов, а также их качественного сравнения можно использовать весьма удобный аппарат марковских цепей и порождающих функций. Данный подход впервые был предложен в работе [1] и вполне оправдывает себя при анализе сложных алгоритмов [2].

**Представление процедуры поиска ШПС в виде марковской цепи.** Стандартная процедура поиска ШПС заключается в проверке

всех возможных фазовых сдвигов принятого и опорного сигналов с определенным шагом по заранее выбранному алгоритму с последующим принятием решения о наличии или отсутствии сигнала с искомой фазой [1, 3, 4]. Поскольку для генерации ШПС применяют псевдослучайные последовательности (ПСП) с конечным периодом (виды ШПС и способы их генерации подробно описаны в работах [3, 5]), необходимо проверять конечное число ячеек неопределенности. Число ячеек можно определить по формуле из работы [5]

$$m = kL, \quad (1)$$

где  $L$  — период ПСП;  $k$  — величина, обратная шагу поиска. Как правило, шаг поиска равен половине длительности элементарного сигнала (чипа ПСП). В этом случае  $m = 2L$ . Систему поиска удобно представить марковской цепью с конечным числом состояний. Марковская цепь представляет собой марковский процесс, у которого области определения и значений — дискретные множества. Известно [6, 7], что марковским процессом называется случайный процесс (СП), для которого при фиксированном  $\xi(u)$  случайная величина  $\xi(t)$  ( $t > u$ ) не зависит от  $\xi(s)$  ( $s < u$ ). Применительно к марковским цепям это свойство может быть представлено в следующем виде: пусть случайный процесс  $\theta(t)$  может принимать конечное число  $K$  дискретных значений  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_K$  в некоторые дискретные моменты времени ( $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ ). Характерное свойство простой цепи Маркова состоит в том, что вероятность значения процесса  $\vartheta_n$  в момент времени  $t_n$  зависит только от того, какое значение имел процесс в предыдущий момент времени  $t_{n-1}$ , т.е. текущее состояние процесса зависит лишь от его предыдущего состояния и не зависит от остальных, более ранних состояний в моменты  $t_i, 0 \leq i \leq n - 2$ :

$$P \{ \vartheta_n | \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1} \} = P \{ \vartheta_n | \vartheta_{n-1} \}.$$

Рассмотрим классическую систему поиска ШПС. Как было отмечено, поиск заключается в последовательном просмотре  $k = \overline{1, m}$  ячеек на области неопределенности сигнала. В ходе проверки каждой ячейки вычисляется интеграл взаимной корреляции принятого и опорного сигналов (фактически исследуется взаимокорреляционная функция (ВКФ) принятой и опорной ПСП [5, 8]), затем вычисленное значение сравнивается с пороговым. В случае превышения порогового значения выносится решение о наличии в канале сигнала с текущей фазой ПСП, равной  $k$ . При этом возможен переход в состояние правильного обнаружения  $H$  или в состояние ошибочного окончания поиска  $F$  [4]. Состояния  $H$  и  $F$  являются поглощающими [6]. Если же порог не превышен, система переходит к анализу следующей ячейки,  $k + 1$ , и

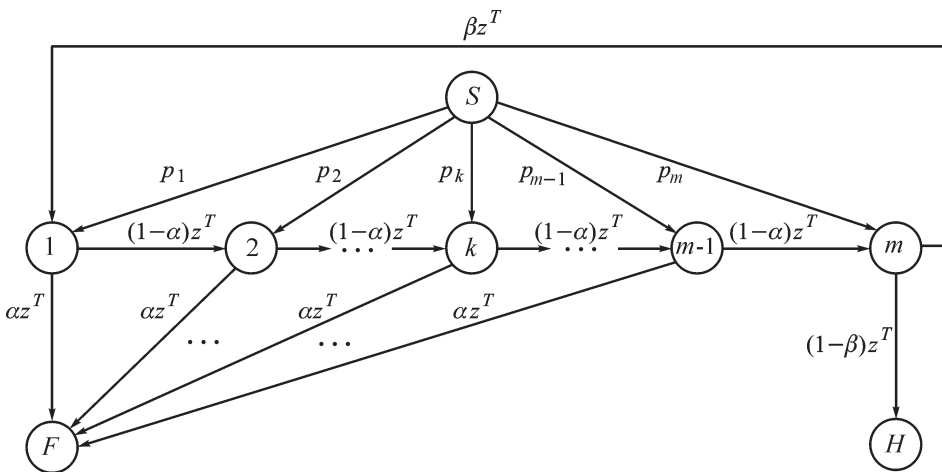


Рис. 1. Направленный граф системы простого циклического поиска

т.д. Таким образом, очевидно, что текущее состояние системы (поиск окончен или продолжается в ячейке  $k + 1$ ) зависит от решения, принятого на этапе анализа  $k$ -й ячейки и не зависит от предыдущих состояний процесса. Это позволяет сделать вывод о том, что система поиска ШПС может быть описана простой марковской цепью.

**Система простого циклического поиска.** Следует отметить, что весьма удобной формой представления системы поиска является направленный граф [5].

Граф для простой циклической системы поиска, приведенный на рис. 1, является треугольным. Множитель  $z^T$  в ветвях графа обозначает временные затраты на анализ каждой ячейки;  $T$  — интервал анализа;  $\alpha$  и  $\beta$  — вероятности ложной тревоги и пропуска;  $p_i$  — априорная вероятность нахождения сигнала в той или иной ячейке. Далее предположим, что априорная информация о текущей фазе ПСП в принятом ШПС отсутствует, т.е.  $p_i = 1/m$ . Принцип построения графов такого рода подробно описан в работах в [4, 5].

Передаточная функция графа из начального состояния  $S$  в состояние успешного завершения поиска  $H$  может быть найдена по формуле Мэйсона [1]:

$$H_1(z) = \frac{(1 - \beta) \sum_{i=0}^{m-1} [(1 - \alpha)^i z^{(i+1)T}]}{m [1 - (1 - \alpha)^{m-1} \beta z^{mT}]}, \quad (2)$$

**Исследование статистических характеристик марковских цепей.** Для этого весьма удобно применять аппарат производящих функций [1, 6]. Выражение для производящей функции записываем в сле-

дующем виде [6]:

$$W_{SH}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{SH}(n)z^n, \quad (3)$$

где  $p_{SH}(n)$  — вероятность перехода из состояния  $S$  в состояние  $H$  за  $n$  шагов. Производящая функция может быть использована для определения ряда статистических характеристик системы. Вероятность перехода системы из начального состояния  $S$  в поглощающее состояние  $H$  за произвольное число шагов определяется как [4]

$$P_d = W_{SH}(z) \Big|_{z=1}. \quad (4)$$

Выражение для среднего времени, затраченного на переход из состояния  $S$  в состояние  $H$ , запишем в виде [4]

$$\langle t \rangle = \frac{dW_{SH}(z)}{dz} \Big|_{z=1}. \quad (5)$$

**Определение рабочих характеристик системы простого циклического поиска.** Передаточная функция графа  $H_1(z)$  представляет собой производящую функцию вероятностей марковской цепи [1], описываемой графом, приведенным на рис. 1. Из этого можно сделать вывод, что выражения (2), (4) и (5) могут быть использованы для анализа поведения системы, показанной на рис. 1. После подстановки формулы (2) в уравнение (4) получаем выражение для вероятности успешного завершения поиска для простой циклической системы с равномерным распределением сигнала по ячейкам области неопределенности:

$$P_d = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (1-\alpha)^i}{m[1 - (1-\alpha)^{m-1}\beta]}; \quad (6)$$

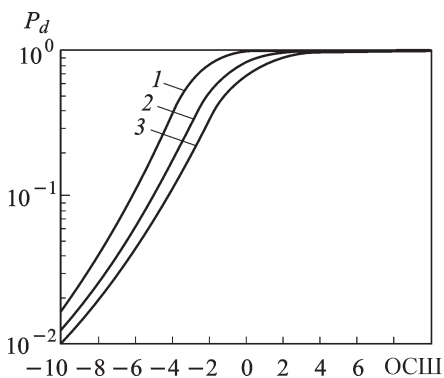
здесь  $m$  определяется из соотношения (1), а вероятности  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть вычислены по формулам [4]

$$\alpha = 0,5 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[ \Pi \sqrt{\frac{N\rho^2}{(1+\rho^2)}} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$(1-\beta) = 0,5 \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[ (1-\Pi)\sqrt{N\rho^2} \right] \right\}, \quad (8)$$

в которых  $\Pi$  — нормированный порог обнаружения;  $N = T/T_0$  ( $T_0$  — длительность элементарного сигнала ШПС);  $\rho^2$  — ОСШ по мощности;

$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-v^2) dv$  — функция Крампа.



**Рис. 2. Зависимость вероятности успешного завершения поиска от ОСШ для параметров:**

$m = 1024$ ,  $N = 0,5$ ;  $T = 55$  — кривая 1,  $T = 45$  — кривая 2,  $T = 40$  — кривая 3

На рис. 2 приведены зависимости вероятности  $P_d$  от ОСШ (SNR, dB) для разных параметров.

Помимо определения  $P_d$ , выражение (6) можно использовать для вычисления вероятности завершения поиска ложной тревогой (состояние  $F$ ). Поскольку в системе есть поглощающие состояния, вероятность поглощения за произвольное число шагов будет равна единице [6]. Поскольку окончание поиска в состояниях  $F$  и  $H$  — несовместимые события, получаем выражение для вероятности ложного окончания поиска:

$$P_f = 1 - P_d.$$

После подстановки формулы (2) в выражение (5) получаем формулу для вычисления среднего времени поиска при его удачном завершении. Итоговое выражение достаточно громоздко и не приведено. На рис. 3 представлены зависимости среднего времени поиска от ОСШ.

Следует учитывать, что в системе (см. рис. 1) присутствуют два поглощающих состояния, так что, попав в состояние  $F$ , система уже никогда не сможет достигнуть состояния  $H$  и наоборот. Следовательно, при вычислении среднего времени перехода системы из состояния  $S$  в состояние  $H$ , нужно пренебречь ветвями графа, ведущими в  $F$ , т.е. положить  $\alpha \ll 1$ . Тогда показатель качества работы системы будет комплексным — поиск завершится в состоянии  $H$  с вероятностью  $P_d$ , среднее время, затраченное на поиск, можно определить по формуле

$$\langle t \rangle = \left. \frac{dH_1(z)}{dz} \right|_{z=1, \alpha \ll 1}. \quad (9)$$

Итак, установлено, что требование снижения среднего времени поиска противоречит требованию увеличения финальной вероятности успешного завершения поиска. На практике для конкретной реализации находят наиболее критические характеристики и выбирают параметры системы, оптимизирующие ее по выбранным критериям. Если же рассматривать систему поиска, в которой состояние ложной тревоги не является поглощающим (в этом случае за ложную тревогу принимают некий временной “штраф” [1, 5]), то результаты могут быть иными (в зависимости от выбранного размера “штрафа”). Из

рис. 3 видно, что с ростом ОСШ среднее время поиска стремится к некоторому асимптотическому значению

$$A \approx T \frac{m}{2}, \quad (10)$$

где первый множитель — это время анализа каждой ячейки, а второй — среднее число ячеек, проанализированных до завершения поиска.

**Сравнение эффективности различных систем поиска.** Используя изложенную методику, можно исследовать и качественно сравнить различные системы поиска. В работе [2] описан алгоритм поиска с проверкой результатов (верификацией). Исходя из аппаратных затрат [2, 9] данный алгоритм наиболее близок к системе двухэтапного поиска [3], что позволяет говорить о целесообразности применения изложенной методики для сравнения рабочих характеристик этих алгоритмов.

Передаточная функция системы с двухэтапным поиском из начального состояния в состояние успешного завершения поиска может быть получена аналогично выражению (2). На рис. 4 представлен направленный граф системы с двухэтапным поиском.

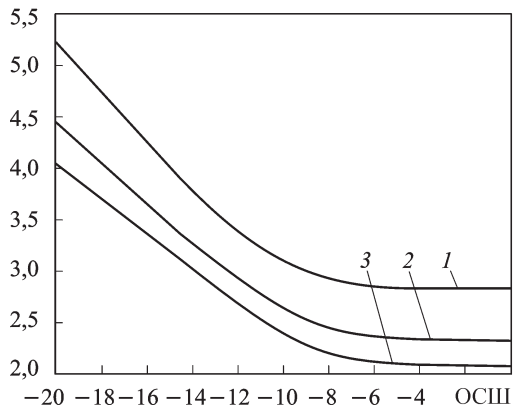
После применения формулы Мэйсона и методики сокращения направленных графов [1, 5], получаем выражение для передаточной функции (начальные условия, аналогичны случаю простого циклического поиска)

$$H_2(z) = \frac{[(1-\beta)(1-\beta')z^{T_1+T_2}] \left[ \sum_{i=0}^{m-1} ((1-\alpha)z^{T_1} + \alpha(1-\alpha')z^{T_1+T_2})^i \right]}{m [1 - (\beta z^{T_1} + (1-\beta)\beta' z^{T_1+T_2}) ((1-\alpha)z^{T_1} + \alpha(1-\alpha')z^{T_1+T_2})^{m-1}]}, \quad (11)$$

где  $\alpha'$  и  $\beta'$  — вероятности ложной тревоги и пропуска при анализе каждой ячейки неопределенности на втором этапе [3]. Эти вероятности также вычисляются по формулам (7) и (8). Разница в параметрах для первого и второго этапов — это длительность анализа:  $T_1$  — на первом этапе,  $T_2$  — на втором.

На рис. 5 приведен направленный граф системы поиска ШПС с верификацией [2].

$\langle t \rangle \times 10^4$ , чип ПСП



**Рис. 3. Зависимость среднего времени поиска от ОСШ для параметров:**

$m = 1024$ ,  $N = 0,5$ ;  $T = 55$  — кривая 1,  $T = 45$  — кривая 2,  $T = 40$  — кривая 3

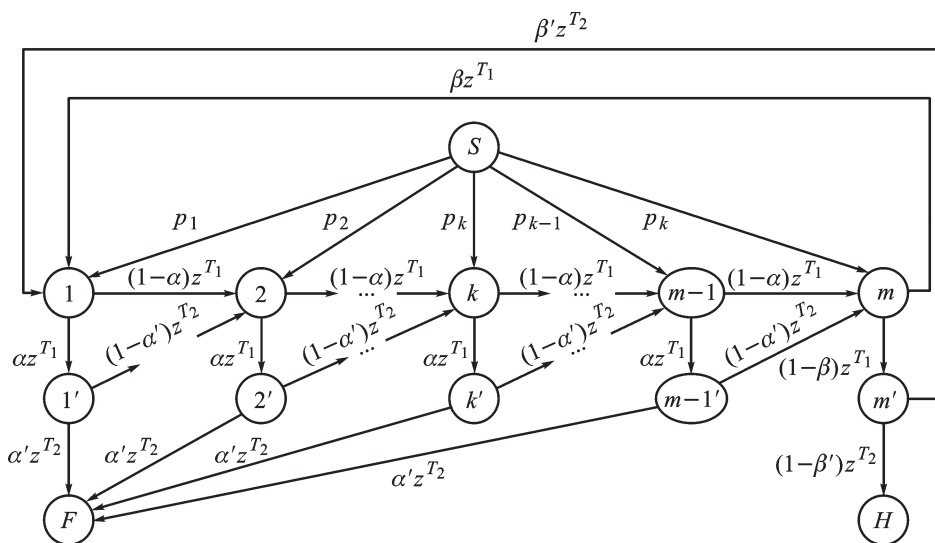


Рис. 4. Направленный граф системы с двухэтапным поиском

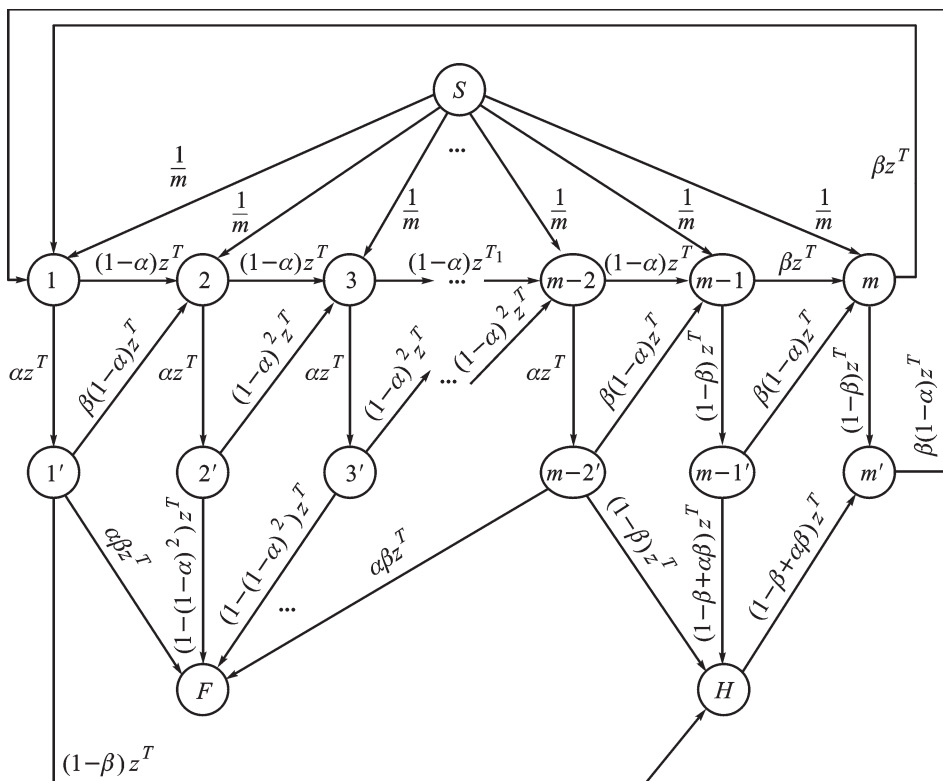


Рис. 5. Модель системы верификации в виде треугольного графа

В работе [2] приведен вывод выражения для передаточной функции системы верификации. После ряда преобразований и ввода следующих обозначений:

$$\begin{aligned}
A(z) &= (1 - \alpha)z^T + \alpha(1 - \alpha)^2z^{2T}, \\
B(z) &= \alpha(2\alpha - \alpha^2)z^{2T}, \\
C(z) &= \beta z^T + (1 - \beta)(1 - \alpha)\beta z^{2T}, \\
D(z) &= (1 - \beta)(1 - \beta + \alpha\beta)z^{2T}, \\
R(z) &= \beta\alpha^2z^{2T}, \quad S(z) = \alpha(1 - \beta)z^{2T}, \\
T(z) &= (1 - \alpha)z^T + \alpha\beta(1 - \alpha)z^{2T},
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $T$  — время анализа на этапах поиска и верификации (может отличаться для каждого этапа), итоговое выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
H_v(z) &= \left\{ S(z) + D(z)(2+C(z)) + (S(z) + \right. \\
&+ T(z)D(z)(1 + C(z))) \left[ \left( \sum_{i=0}^{m-4} A^i(z) \right) + A^{m-4}(z)T(z) \right] \left. \right\} \times \\
&\quad \times \left[ m(1 - C^2(z)T^2(z)A^{m-4}(z)) \right]^{-1} + \\
&\quad + \left\{ C(z) \left[ C(z)S(z)(1 + T(z)(1 + A^{m-4}(z))) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (S(z) + T(z)A^{m-4}(z))(S(z) + T(z)D(z)) \right] \right\} \times \\
&\quad \times \left[ m(1 - C^2(z)T^2(z)A^{m-4}(z)) \right]^{-1}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Следует отметить, что второе слагаемое вносит сравнительно малый вклад в итоговую сумму, что в ряде случаев позволяет пренебречь вторым слагаемым.

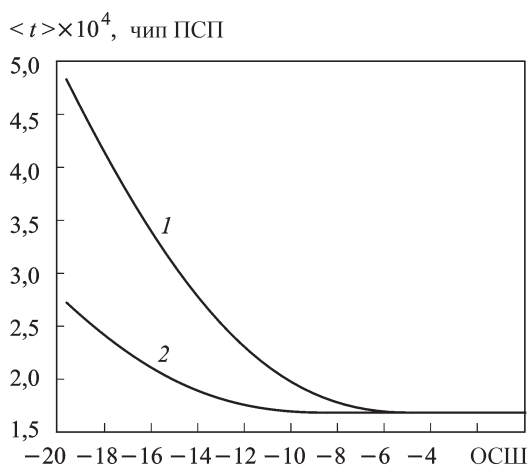
Применив выражение, аналогичное уравнению (9), для выражений (11) и (13), можно получить формулы для вычисления среднего времени поиска двух исследуемых систем. Полученные производные чрезвычайно громоздки и приводиться не будут — на рис. 6,  $a$  и  $b$  приведены графики зависимости среднего времени поиска от ОСШ, ДБ. Длительность анализа на первом и втором этапах системы двухэтапного поиска равна длительности анализа на первом и втором этапах системы верификации.

**Выводы.** Выбранная методика исследования, основанная на теории марковских цепей и производящих функций, является весьма удобным инструментом для определения статистических характеристик систем поиска ШПС и их сравнения. Детально представлено обоснование применения указанной теории для анализа эффективности систем поиска ШПС. При помощи данного аппарата было прове-

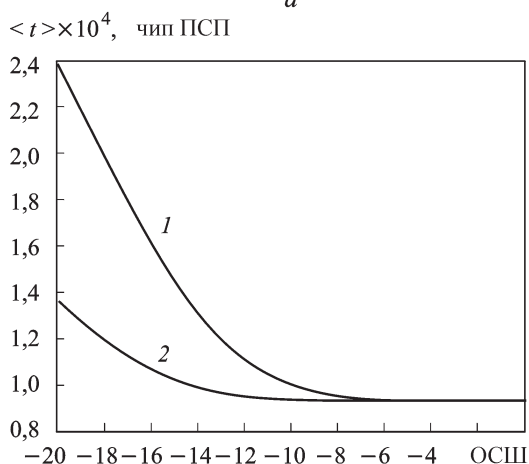


дено сравнительное исследование статистических характеристик системы поиска ШПС с верификацией и соответствующих показателей для классической системы с двухэтапным поиском.

Анализируя графики, приведенные на рис. 6, можно сделать вывод о том, что среднее время поиска для системы с верификацией меньше аналогичного показателя для системы с двухэтапным поиском, за исключением диапазона, в котором данный показатель стремится к постоянному значению (10). Выигрыш относительно среднего времени поиска в случае применения системы с верификацией составляет в среднем 5 дБ в ОСШ по мощности. Равенство асимптотических значений для этих систем обусловлено тем, что для каждой из них на анализ любой ячейки отводится равное время. Таким образом, при равных аппаратных затратах [2, 9] система с верификацией имеет лучшие



*a*



*б*

**Рис. 6. Зависимость среднего времени поиска от ОСШ для параметров  $m = 512$ ,  $N = 0,5$ ;  $T = 65$  (а) и  $m = 2048$ ,  $N = 0,5$ ;  $T = 90$  (б):**

*1* — система двухэтапного поиска, *2* — система поиска с верификацией

показатели среднего времени поиска, нежели система двухэтапного поиска.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J a c k K. H o l m e s . Coherent spread spectrum systems. – N.Y.: John Wiley & Sons, 1982.
2. Ш а х т а р и н Б. И., Ч е р н ы ш А. В. / Алгоритм верификации результатов поиска шумоподобных сигналов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. – 2006. – № 2 (63). – С. 67–78.
3. S i m o n M. K., O m u r a J. K., S c h o l t z R. A., L e v i t t B. K. Spread spectrum communications. Computer Science Press, Inc., Rockville, Md., 1985.
4. Ж у р а в л е в В. И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах. – М.: Радио и связь, 1986. – 240 с.
5. П о м е х о з а щ и щ е н н о с т ь систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / В.И. Борисов, В.М. Зинчук, А.Е. Лимарев и др. – М.: Радио и связь, 2003. – 640 с.
6. Т и х о н о в В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
7. Ш а х т а р и н Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. – М.: Радио и связь, 2002. – 568 с.
8. С к л я р Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. / Под ред. А.В. Назаренко – М.: Вильямс, 2003. – 1099 с.
9. Ч е р н ы ш А. В. / Практическая реализация алгоритма верификации результатов поиска ШПС // Научный вестник МГТУ ГА. Сер. “Радиофизика и радиотехника”. – 2006. – № 107. – С. 126–131.

Статья поступила в редакцию 17.05.2007

Борис Ильич Шахтарин родился в 1933 г., окончил в 1958 г. Ленинградскую Военно-воздушную инженерную академию им. А.Ф. Можайского и в 1968 г. ЛГУ. Д-р техн. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат Государственной премии СССР, заслуженный деятель науки и техники РФ. Автор более 200 научных работ, в том числе 4 книг, в области анализа и синтеза систем обработки сигналов.



B.I. Shakhটারин (b. 1933) graduated from the Leningrad Air Force Engineering Academy n.a. A. F. Mozhaysky in 1958 and from Leningrad State University in 1968. D. Sc. (Eng.), professor of the Bauman Moscow State Technical University. USSR State Prize winner, RF Honoured Worker of science and technology. Author of more than 200 publications, among them 4 books, in the field of analysis and synthesis of signal processing systems.

Александр Викторович Черныш родился в 1982 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2006 г. Аспирант кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области формирования и поиска широкополосных сигналов.

A.V. Chernysh (b. 1982) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2006. Post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of generation and acquisition of spread spectrum signals.