

УДК 621.865, 004.942, 519.876.5

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ УНИВЕРСАЛЬНЫХ СИСТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.А. Трудоношин, В.Г. Федорук

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: trudonoshin@mail.ru; fedoruk@comcor.ru

Рассмотрена методика решения обратной задачи динамики механизмов с использованием универсальных систем моделирования сложных технических объектов. Обратная задача заключается в определении сил, приложенных в исполнительных механизмах для обеспечения заданной траектории их движения. Показаны математические основы решения этой задачи, приведен пример численного эксперимента, подтверждающий корректность полученного решения. С помощью предложенной методики решения обратной задачи динамики можно выбирать силовые агрегаты многозвенных механизмов на этапе их проектирования, а также решать задачи управления ими.

Ключевые слова: система автоматизированного проектирования, моделирование, математическая модель, механические системы, динамика.

SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF DYNAMICS USING THE UNIVERSAL SIMULATION SYSTEMS

V.A. Trudonoshin, V.G. Fedoruk

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: trudonoshin@mail.ru; fedoruk@comcor.ru

A technique for solving the inverse problem of dynamics of mechanisms using the universal systems of simulation of complex technical objects is considered. The universe problem consists in determination of forces applied in actuators for ensuring the specified trajectory of their motion. The mathematical bases for solving this problem are shown, an example of numerical experiment is given, which confirms the correctness of the obtained solution. Using the proposed technique for solving the inverse dynamics problem, it is possible to choose load-bearing aggregates of multi-link mechanisms at the stage of their designing, as well as to solve problems of their control.

Keywords: CAE, simulation, mathematical model, mechanical systems, dynamics.

Введение. В настоящей статье под обратной задачей будет пониматься задача нахождения сил (моментов сил), которые необходимо приложить в исполнительных механизмах, чтобы обеспечить заданную траекторию их движения (например, захват роботоманипулятора). В классической механике существует достаточно развитый математический аппарат для решения этой задачи: уравнения кинетостатики; уравнения движения Лагранжа второго рода; принцип Гаусса [1]. Однако у перечисленных уравнений и принципов имеются ограничения: уравнения кинетостатики можно использовать только

для разомкнутых кинематических схем, для применения уравнений Лагранжа второго рода необходимо предположение идеальности связей, при использовании принципа Гаусса на каждом шаге численного интегрирования приходится решать задачу минимизации.

Цель данной работы — рассмотреть один из вариантов решения обратной задачи с помощью универсальных систем моделирования динамических объектов.

Математическая модель. В настоящее время в мире используется много программ многоаспектного моделирования динамических объектов, наиболее известными из которых являются программы AMEsim, MathModelica, SimulationX, ПА9, PRADIS [2–6]. По характеру реализованного в них математического обеспечения эти программы близки к комплексу программ ПА9. Ни в одной из указанных программ явным образом не заявлено о возможности решения обратной задачи, также необходима методика ее решения.

Рассмотрим получение математической модели для двухзвенной двумерной механической системы (рис. 1). В предположении, что система расположена в горизонтальной плоскости, запишем уравнения динамики системы, последовательно разрывая наложенные связи и заменяя их силами и моментами реакции, действующими на каждое звено. Уравнения для численного решения неявным методом Эйлера на одном (n -м) шаге интегрирования имеют вид:

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} + F_{S1} + F_{S2} = 0; \quad (1)$$

$$m_2 \frac{dV_2}{dt} - F_{S2} + F_P = 0; \quad (2)$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + M(F_{S1}) + M(F_{S2}) = 0; \quad (3)$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} - M(F_{S2}) + M(F_P) = 0; \quad (4)$$

$$F_{S1} - C_1 x_1 = 0; \quad F_{S2} - C_2 x_2 + C_1 x_1 = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{V_1 - V_1^{n-1}}{h} = 0; \quad \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\omega_1 - \omega_1^{n-1}}{h} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{dV_2}{dt} - \frac{V_2 - V_2^{n-1}}{h} = 0; \quad \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{\omega_2 - \omega_2^{n-1}}{h} = 0; \quad (7)$$

$$x_1 - x_1^{n-1} - V_1 h = 0; \quad x_2 - x_2^{n-1} - V_2 h = 0; \quad (8)$$

$$\varphi_1 - \varphi_1^{n-1} - \omega_1 h = 0; \quad \varphi_2 - \varphi_2^{n-1} - \omega_2 h = 0, \quad (9)$$

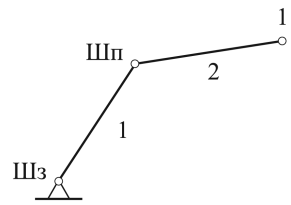


Рис. 1. Двухзвенная двумерная механическая система:

Шз — шарнир, закрепленный на основании; Шп — шарнир, связывающий звенья 1 и 2

где m_1, m_2 — массы звеньев 1 и 2; J_1, J_2 — центральные моменты инерции этих звеньев; C_1, C_2 — жесткости шарниров; $n - 1$ — индекс, относящийся к переменной на предыдущем шаге численного интегрирования; t — время; h — шаг интегрирования. Неизвестными величинами в уравнениях (1)–(9) являются: векторы скоростей центров масс звеньев V_1, V_2 ; векторы ускорений центров масс звеньев $dV_1/dt, dV_2/dt$; векторы линейных перемещений x_1, x_2 ; угловые скорости звеньев ω_1, ω_2 ; угловые ускорения $d\omega_1/dt, d\omega_2/dt$; углы поворота φ_1, φ_2 ; векторы сил реакций в шарнирах F_{S1}, F_{S2} ; вектор силы F_P , прикладываемой к точке 1; моменты соответствующих сил относительно центров масс звеньев $M(F_{S1}), M(F_{S2}), M(F_P)$.

Уравнения (1) и (2) — это уравнения Даламбера; (3) и (4) — уравнения Эйлера; (5) — уравнения реакций в шарнирах; (6) и (7) — уравнения метода численного интегрирования (связь скоростей и ускорений); (8) и (9) — уравнения вычисления определенного интеграла (связь скоростей и перемещений). Для повышения точности решения уравнений (6)–(9) могут быть более высокого порядка.

Если вектор внешней силы F_P известен, то получаем замкнутую систему алгебраических уравнений (на шаге интегрирования векторы ускорений центров масс звеньев являются алгебраическими переменными). В этом случае, выполняя рекуррентную процедуру по индексу n , можно решить прямую задачу динамики. В результате определяем значения перемещений, скоростей и ускорений как функций времени. Аналогично строится математическая модель в большинстве перечисленных выше программ анализа. Отличия могут быть в выборе вектора неизвестных. Система уравнений составляется автоматически по описанию топологии механизма, для решения применяются высокоэффективные методы, учитывающие разреженность матриц коэффициентов. При этом отсутствуют ограничения на вид кинематической цепи (может быть как разомкнутой, так и замкнутой), а также на тип связей (могут быть как голономными, так и неголономными).

Если вектор внешней силы F_P неизвестен, но известна траектория движения точки 1:

$$\begin{aligned} x_2^x + r \cos \varphi_2 - x_3^x(t) &= 0; \\ x_2^y + r \cos \varphi_2 - x_3^y(t) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

то совместно с уравнениями (1)–(9) вновь получаем замкнутую систему уравнений. Решая эту систему уравнений, находим значения перемещений, скоростей и ускорений, а также значение силы F_P , т.е. имеет место обратная задача динамики. В (10) x_2^x, x_2^y — проекции вектора перемещений звена 2 на оси координат; x_3^x, x_3^y — проекции заданного вектора перемещений на оси координат; r — расстояние от центра масс звена 2 до точки с заданной траекторией движения.

В большинстве случаев приводные механизмы подсоединены не к той точке, траекторию движения которой необходимо обеспечить, поэтому для решения обратной задачи динамики в более общем виде требуется применение рассмотренной ниже методики.

Численный эксперимент. Для проверки работоспособности предлагаемой методики решения обратной задачи динамики

механизмов был выполнен численный эксперимент с использованием комплекса программ ПА8, разработанного на кафедре “Системы автоматизированного проектирования” МГТУ им. Н.Э. Баумана. В качестве объекта исследования рассматривался абстрактный трехмерный механизм, состоящий из трех связанных шарнирно штанг (рис. 2). Исходно все штанги расположены в плоскости XOY . На рис. 2 введены следующие обозначения центров масс штанг: точка a с координатами $(8, 2, 0)$; точка b с координатами $(6, 4, 0)$; точка c с координатами $(8, 2, 0)$. Штанга A связана с основанием сферическим шарниром в точке с координатами $(0, 0, 0)$. Штанги A и B , B и C соединены цилиндрическими шарнирами. Для представления шарниров использовались модели с ограничением перемещения [7].

Точки d и a , a и b , b и c связаны попарно силовыми элементами, представляющими собой источники силы со сферическими шарнирами в точках приложения. Точка d неподвижна и имеет координаты $(0, 0, 3)$.

Ставилась задача для заданного пространственного перемещения конца 4 штанги C определить необходимые для этого усилия в связях $d-a$, $a-b$ и $b-c$, которые должны быть развиты соответствующими силовыми элементами. Перемещение точки 4 — это движение по трехмерной кривой Лиссажу (эллипс) с выражениями для координат

$$x = 8 + \sin u; \quad y = 1 - \cos u; \quad z = 2(1 - \cos u),$$

где u — переменная, зависящая от времени,

$$\begin{cases} u = 0 & t \leq 1; \\ u = \pi(1 - \cos((t-1)/2)) & t > 1, t < 1 + 2\pi; \\ u = 2\pi & t \geq 1 + 2\pi. \end{cases}$$

Интервал времени моделирования 10 с. Задача решалась в два этапа. На первом этапе в модели объекта силовые элементы заменялись

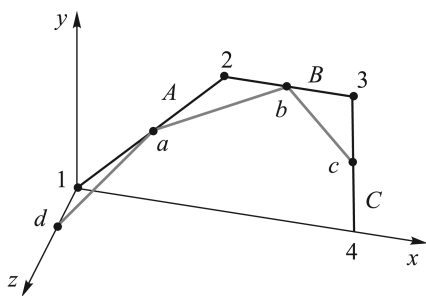


Рис. 2. Трехмерный механизм:

A , B и C — штанги массой 25, 17 и 17 кг, центральные моменты инерции 0,008, 67, 67 кг·м² для штанги A ; 0,005, 23, 23 кг·м² — для штанг B и C

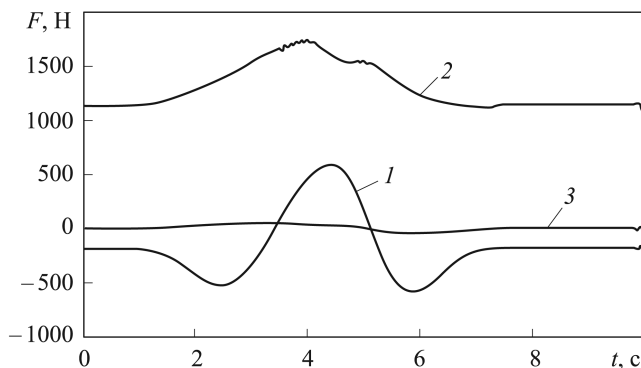


Рис. 3. Зависимость сил, возникающих в источниках перемещений, от времени для сил F_{da} (1), F_{ab} (2) и F_{bc} (3)

датчиками, фиксирующими расстояния между точками d и a , a и b , b и c . Далее выполнялся динамический анализ поведения объекта при внешнем воздействии в виде описанного выше принудительного перемещения конца штанги C , при этом измеряемые значения расстояний сохранялись в файлах в формате “модельное время, расстояние”.

На втором этапе датчики расстояний заменялись источниками (генераторами) перемещений, управляемыми содержимым файлов, созданных на первом этапе. Воздействие на конец 4 штанги C удалялось. Вновь проводился динамический анализ объекта, при этом в файлах сохранялись зависимости сил, возникающих в источниках перемещений, от времени. Эти зависимости представляют собой искомое решение (рис. 3). Следовательно, путем решения обратной задачи динамики на основе уравнений типа (1)–(10) определены силы, которые обеспечивают заданное движение конечной точки механизма. Для проверки механизма выполнялся еще один динамический анализ объекта с силовыми элементами между точками d и a , a и b , b и c , управляемыми полученным решением. По результатам этого численного эксперимента оценивалось максимальное отклонение воспроизведенной траектории движения точки 4 от траектории этой же точки, заданной на первом этапе. Оно составило 4 мм (0,1 % по отношению к амплитуде перемещения по оси z) и ожидаемо соответствовало конечному моменту времени перемещения объекта. Отклонение зависит от точности метода интегрирования и точности сплайновой аппроксимации, которые можно увеличить переходом к более высоким порядкам.

Заключение. Проведенное исследование показало, что решение обратной задачи динамики возможно путем двукратного обращения к математической модели объекта. Показана работоспособность предлагаемой методики, однако для оценки ее практической значимости необходима апробация на реальных механических системах. Кроме того, следует отметить важную особенность методики: все воздей-

ствия на механический объект в виде перемещений должны быть дважды дифференцируемы. В связи с этим, например, выражения для координат кривой Лиссажу в качестве аргумента содержат вспомогательную переменную u , сигмоидально изменяющуюся во времени, а генераторы перемещений, участвующие в модели объекта на втором этапе, используют кубическую интерполяцию данных из файлов. Можно также отметить, что исходных источников перемещений может быть несколько при условии их непротиворечивости друг другу. Предложенная методика решения обратной задачи динамики может быть использована как при выборе силовых агрегатов многозвенных механизмов на этапе их проектирования, так и при решении задач управления ими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. The integrated platform formulti-domain systems imulation. 2004. URL: <http://www.lmsintl.com/LMS-Imagine-Lab-AMESim> (дата обращения 04.09.2012).
3. *Новая эра в оптимизации комплексного проектирования.* 2008. URL: <http://www.wolfram.com/system-modeler> (дата обращения 04.09.2012).
4. *Multi-domain system simulation and modeling.* 2003. URL: <http://www.itisim.com/simulationx/system-simulation> (дата обращения 04.09.2012).
5. *Применение комплекса ПА9 для проектирования объектов машиностроения.* 2000. URL: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> (дата обращения 04.10.2012).
6. *PRADIS* — программный комплекс для анализа динамики систем различной физической природы. 1992. URL: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> (дата обращения 04.06.2012).
7. *Трудоношин В.А., Федорук В.Г.* Сравнение математических моделей шарнирного соединения // Информационные технологии. 2012. № 8. С. 20–23.

REFERENCES

- [1] Zenkevich S.L., Yushchenko A.S. *Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami* [Fundamentals of robotic manipulator control]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2004. 478 p.
- [2] The integrated platform formulti-domain systems emulation. 2004. Available at: <http://www.lmsintl.com/LMS-Imagine-Lab-AMESim> (accessed 04.09.2012).
- [3] *Novaya era v optimizatsii kompleksnogo proektirovaniya* [A new era in integrated design optimization]. 2008. Available at: <http://www.wolfram.com/system-modeler> (accessed 04.09.2012).
- [4] *Multi-domain system simulation and modeling.* 2003. Available at: <http://www.itisim.com/simulationx/system-simulation> (accessed 04.09.2012).
- [5] *Primenenie kompleksa PA9 dlya proektirovaniya ob"ektov mashinostroeniya* [The application of a PA9 complex for designing mechanical engineering objects]. 2000. Available at: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> (accessed 04.10.2012).
- [6] *PRADIS — programmnyy kompleks dlya analiza dinamiki sistem razlichnoy fizicheskoy prirody* [PRADIS - a software package for the dynamic analysis of various physical systems]. 1992. Available at: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> (accessed 04.06.2012).

[7] Trudonoshin V.A., Fedoruk V.G. Comparison of mathematical models of a hinged joint. *Inf. Tekhnol.* [Inf. Technol.], 2012, no. 8, pp. 20–23 (in Russ).

Статья поступила в редакцию 26.11.2012

Владимир Анатольевич Трудоношин — канд. техн. наук, доцент кафедры “Системы автоматизированного проектирования” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области математического обеспечения систем автоматизированного проектирования.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.A. Trudonoshin — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Computer-Aided Design Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of mathematical support of computer-aided design systems.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Владимир Геннадьевич Федорук — канд. техн. наук, доцент кафедры “Системы автоматизированного проектирования” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 80 научных работ в области математического обеспечения систем автоматизированного проектирования.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.G. Fedoruk — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Computer-Aided Design Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 80 publications in the field of mathematical support of computer-aided design systems.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.