

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИГНАЛА ОШИБКИ В НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ФАП

Б.И. Шахтарин, Т.Г. Асланов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: Shakhtarin@mail.ru; Tabasik@gmail.com

Рассмотрены методы расчета плотности распределения вероятности сигнала ошибки в непрерывных и дискретных системах синхронизации при наличии помехи. Приведены уравнение, определяющее плотность распределения вероятностей для непрерывной фазовой автоподстройки, и его решение при наличии прицельной помехи. При этих же условиях показано получение плотности распределения вероятностей сигнала ошибки приближенным методом Галеркина в случае дискретной фазовой автоподстройки. При расчетах использовался синусоидальный вид нелинейности характеристики фазового дискриминатора как для случая непрерывной фазовой автоподстройки, так и для дискретной. Получены графики плотностей распределения вероятностей сигнала рассогласования для непрерывной и дискретной фазовой автоподстройки и проведен их сравнительный анализ. Сделан вывод о воздействии прицельной помехи на систему непрерывной и дискретной фазовой автоподстройки при которой брались для сравнения различные значения отношения сигнал/шум, и отношения помеха/сигнал.

Ключевые слова: фазовая автоподстройка, дифференциальное уравнение, отношения сигнал/шум.

PROBABILITY DISTRIBUTION DENSITY OF ERROR SIGNAL IN THE CONTINUOUS AND DISCRETE PHASE-LOCKED LOOPS IN THE PRESENCE OF JAMMING

B.I. Shakhtarin, T.G. Aslanov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: Tabasik@gmail.com

Methods for calculation of the probability distribution density of an error signal in the continuous and discrete synchronization systems in the presence of jamming are considered. An equation defining the probability distribution density for the continuous phase-locked loop and its solution in the presence of jamming are given. For the same conditions, determination of the probability distribution density of an error signal using the approximate Galerkin method for the case of the discrete phase-locked loop is shown. The sinusoidal form of nonlinearity of the phase discriminator characteristic was used in calculations for both continuous and discrete phase-locked loops. Plots of the probability distribution densities of the error signal are constructed for the continuous and discrete phase-locked loops and their comparative analysis is performed. A conclusion is drawn on the impact of jamming upon the system of the continuous and discrete phase-locked loops, when different values of the signal-to-noise ratio and jam-to-signal ratio were taken for comparison.

Keywords: phase-locked loop, differential equation, signal-to-noise ratio.

Внедрение спутниковых радионавигационных [1, 2] и радиосвязных [3] систем, а также появление ортогональных систем с частотным уплотнением типа OFDM [4, 5] породили повышенный интерес

к системам синхронизации и к их точности [6–8]. Все эти системы работают в условиях воздействия помех [7, 9, 10].

В настоящей статье проведен анализ плотности распределения вероятностей для непрерывных и дискретных схем фазовой автоподстройки (ФАП). Впервые выполнен сравнительный анализ результатов расчета для непрерывной и для дискретной ФАП, а также доказана адекватность модели дискретной системы.

Анализ ПРВ сигнала рассогласования в непрерывном режиме. Рассмотрим решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [h(x) W(x, t)] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где x — фазовое рассогласование колебаний сигнала и управляемого генератора в системе синхронизации; r — отношение сигнал/шум (ОШ) на выходе системы синхронизации; $W(x)$ — плотность распределения вероятности (ПРВ) сигнала рассогласования; $h(x) = g(x) - \beta$ (β — относительное значение частотного рассогласования указанных колебаний, $g(x)$ — дискриминационная характеристика фазового детектора $g(x + 2\pi) = g(x)$, $|g(x)| \leq 1$).

До сих пор не найдено аналитическое решение уравнения ФПК (1), в общем нестационарном случае, поэтому большинство исследований было направлено на анализ стационарного решения уравнения (1) при $\partial W / \partial t = 0$ как точного [11, 12], так и приближенного [8, 9].

Точное решение в стационарном режиме было получено В.И. Тихоновым [11] и Р.Л. Стратоновичем [12] и определяется формулой Тихонова–Стратоновича

$$W(x) = A(v, r) e^{vx + \cos x} \int_x^{x+2\pi} e^{-vy + r \cos y} dy, \quad (2)$$

где $A^{-1}(v, r) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-vx + r \cos x} \int_x^{x+2\pi} e^{-vy - r \cos y} dy dx = 4\pi^2 e^{-\pi v} |I_{iv}(r)|^2$;

$I_{iv}(r)$ — модифицированная функция Бесселя мнимого порядка, $v = \beta r$.

Позднее на основе (2) в работе [13] была получена формула для $W(x)$ в виде функционального ряда [13, 14]

$$W(x) = \frac{1}{2\pi R_{\Sigma}} e^{r \cos x} \left[I_0(r) + 2v \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n^2(r)}{n^2 + v^2} (v \cos nx - n \sin nx) \right], \quad (3)$$

где $R_\Sigma = I_0^2(r) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{I_n^2(r)}{n^2 + v^2}$; $I_n(r)$ – модифицированная функция Бесселя n -го порядка.

Из сравнения формул (2) и (3) следует очевидное преимущество (3), тем более что ряд (3), как будет показано далее, быстро сходится.

Вычисление статистических характеристик дискретной ФАП методом Галеркина. Рассмотрим приближенный метод вычисления ПРВ $W(x)$ на основе метода Галеркина [15, 16].

Пусть

$$W(x) \approx W_N(x), \quad W_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n(N) \psi_n(x),$$

где $\{\psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – полная система ортогональных на интервале $(-\pi, \pi)$ функций.

Коэффициенты $c_n(N)$ ($n = \overline{0, N}$) должны определяться из решения системы линейных уравнений [9]

$$\sum_{n=0}^N (\alpha_{mn}/\gamma_m) c_n(N) = c_m(N); \quad m = \overline{0, N}, \quad (4)$$

где $\gamma_m = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m^2(x) dx$, $\alpha_{mn} = (l_m(z), \psi_n(z))$.

Возьмем в качестве системы ортогональных функций $\{\psi_m(x)\}$ систему тригонометрических функций $\{\psi_m(x)\} = \{1; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x \dots\}$. В этом случае

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \cos mx & \text{при } i \text{ четном;} \\ \sin mx & \text{при } i \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} i/2 & \text{при } i \text{ четном;} \\ (i+1)/2 & \text{при } i \text{ нечетном;} \end{cases} \quad \gamma_m = \begin{cases} 2\pi & \text{при } m = 0; \\ \pi & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Вычислим скалярное произведение $l_m(z) = (q(z), \psi_m)$ на всей числовой оси значений $x \in (-\infty; \infty)$, т.е.

$$l_m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x|z) \psi_m(x) dx,$$

где $q(x|z)$ – переходная ПРВ, приведенная к интервалу $(-\pi; \pi)$.

Тогда

$$l_m(z) = \begin{cases} e^{-m^2\sigma^2/2} \cos(m[z - T_0(\sin z - \beta)]) & \text{при } i \text{ четном;} \\ e^{-m^2\sigma^2/2} \sin(m[z - T_0(\sin z - \beta)]) & \text{при } i \text{ нечетном,} \end{cases}$$

где T_0 – нормированное время дискретизации.

Далее вычислим коэффициенты α_{ij} . Воспользуемся соотношениями из работы [17]

$$\int_0^{\pi} \sin(z \sin(x)) \sin nx \, dx = [1 - (-1)^n] \frac{\pi}{2} J_n(z);$$

$$\int_0^{\pi} \cos(z \sin(x)) \cos nx \, dx = [1 + (-1)^n] \frac{\pi}{2} J_n(z).$$

Тогда

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \pi A [J_{m-n}(mT_0) + J_{m+n}(mT_0)] & \text{при } i, j \text{ четных;} \\ \pi A [J_{m-n}(mT_0) - J_{m+n}(mT_0)] & \text{при } i, j \text{ нечетных;} \\ \pi B [J_{m-n}(mT_0) + J_{m+n}(mT_0)] & \text{при } i \text{ нечетном, } j \text{ четном;} \\ \pi B [J_{m+n}(mT_0) - J_{m-n}(mT_0)] & \text{при } i \text{ четном, } j \text{ нечетном,} \end{cases}$$

где $A = e^{-m^2\sigma^2/2} \cos(mT_0\beta)$; $B = e^{-m^2\sigma^2/2} \sin(mT_0\beta)$; $J_k(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка k . Очевидно, что

$$\alpha_{0n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 0; \\ 2\pi & \text{при } n = 0; \end{cases} \quad \alpha_{m0} = \begin{cases} 2\pi A J_m(mT_0) & \text{при } i \text{ четном;} \\ 2\pi A J_m(mT_0) & \text{при } i \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Из условия нормировки ПРВ определяем

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_N(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0(N) \, dx = 2\pi c_0(N) = 1,$$

отсюда следует $c_0(N) = 1/(2\pi)$.

Запишем m -ю строку c_m системы в форме [9]

$$c_m(N) = (\alpha_{m1}/\gamma_m) c_1(N) + \dots + (\alpha_{mN}/\gamma_m) c_N(N) + (\alpha_{0m}/\gamma_m) c_0(N),$$

где $m = \overline{0, N}$. При $m = 0$ приходим к тождеству, поэтому система уравнений содержит N строк ($m = \overline{1, N}$) и может быть представлена в матричном виде:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{C}_N^* = \beta_N^*,$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размером $N \times N$; \mathbf{A} — матрица с элементами $\alpha_{mn}/\gamma_m = \alpha_{mn}/\pi$, $m, n = \overline{1, N}$; $\mathbf{C}_N^* = [c_1(N), \dots, c_N(N)]^T$ — вектор; $\beta_N^* = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T$ — вектор; $\beta_m = (\alpha_{m0}/\gamma_m) c_0(N) = \alpha_{m0}/2\pi^2$.

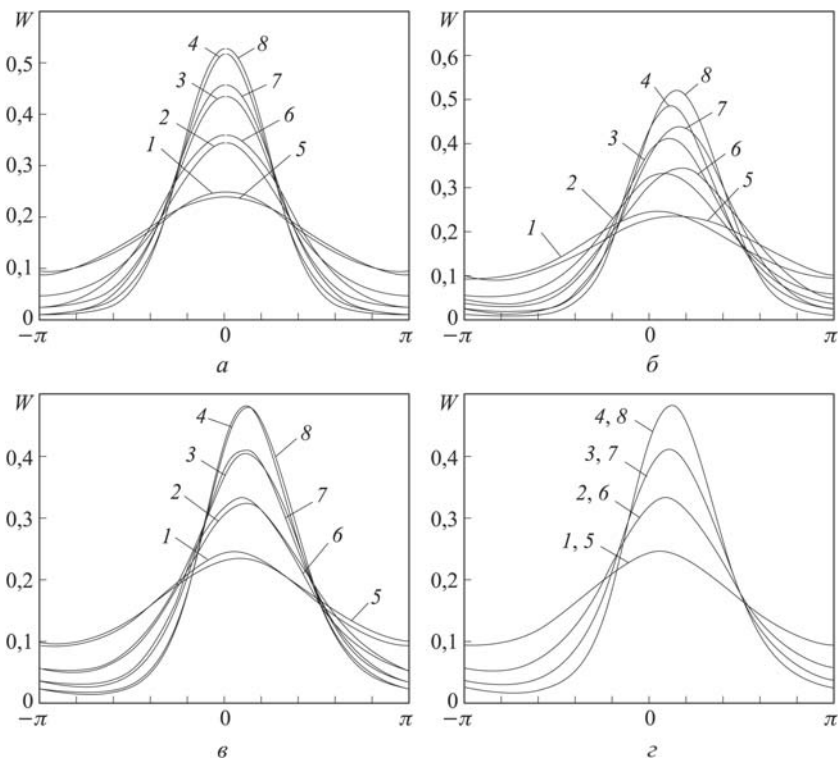
Точное значение ПРВ находим в форме предельного соотношения

$$W(x)' = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(x),$$

тогда

$$W(x) = \sum_{n=0}^N c_n(N) \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin x), \quad (5)$$

где A_n, B_n — расчетные коэффициенты.



Расчет ПРВ по формулам (3) и (5) при $T_0 = 1$ (а, б), 0,25 (в), 0,1 (г); $\beta = 0$ (а); 0,4 (б-г)

На рисунке приведены ПРВ сигнала рассогласования ФАП, рассчитанные по формулам (3) и (5). Кривые 1, 5 получены при $r = 0,5$; кривые 2, 6 – при $r = 1$; кривые 3, 7 – при $r = 1,5$; кривые 4, 8 – при $r = 2$. Кривые 1–4 рассчитаны по формуле (3), кривые 5–8 – по формуле (5).

Заключение. Результаты сравнительного анализа ПРВ сигнала ошибки для непрерывных и дискретных ФАП показывают, что при нулевой начальной расстройке даже при нормированном интервале дискретизации $T_0 = 1$ расхождения ПРВ в указанных двух случаях несущественна (рисунок, а). При том же интервале дискретизации ($T_0 = 1$), но при ненулевой начальной расстройке ($\beta = 0,4$) (рисунок, б) наблюдаются существенные расхождения, которые уменьшаются с уменьшением интервала дискретизации (рисунок, в), ($T_0 = 0,25$), и накладываются друг на друга при $T_0 = 0,1$ (рисунок, г).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов И.Б. Глобальные навигационные спутниковые системы. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 182 с.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехник, 2005. 688 с.

3. *Синхронизация* в радиосвязи и радионавигации / Б.И. Шахтарин, В.В. Сизых, Ю.А. Сидоркина и др. М.: Горячая линия–Телеком, 2011. 278 с.
4. *Van Nee. R., Prasad R.* OFDM in wireless multimedia communications. London Artech House, 2000. 260 p.
5. *Bahai A.R.S., Saltzberg B.R., Ergen M.* Multi-carrier digital communications theory and applications of OFDM. 2nd ed. N.Y. Springer, 2004. 411 p.
6. *Meyr H., Ascheid G.* Synchronization in digital communications. Vol. 1 Phase, frequency – locked loops, and amplitude control. N.Y. J. Wiley, 1990. 510 с.
7. *Stephens D.R.* Phase-locked loops for Wireless communications. Digital, analog and implementations. 2nded. N.Y. Moscow. Kluwer Ac.publ. 2002. 421 с.
8. *Шахтарин Б.И.* Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. 488 с.
9. *Шахтарин Б.И.* Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.
10. *Meyr H., Ascheid G.* Synchronization in digital communications v. 1 Phase, frequency–locked loops, and amplitude control. N.Y. Wiley, 1990. 510 с.
11. *Тихонов В.И.* Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты // Автоматика и телемеханика. 1959. № 9. С. 1188–1196.
12. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
13. *Шахтарин Б.И.* Анализ асимптотических значений статических характеристик ФАПЧ // Радиотехника и электроника. 1968. № 2. С. 246–258.
14. *Тихонов В.И., Шахтарин Б.И.* Статистические характеристики фазовой автоподстройки частоты // Автоматика и телемеханика. 1965. № 9. С. 1563–1572.
15. *Капторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М. -Л.: Гостехиздат, 1949.
16. *Chie C.M.* Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loop in white Gaussian noise // IEEE Trans. 1978. Vol. COM-26, № 6. P. 860–865.
17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

REFERENCES

- [1] Vlasov I.B. Global'nye navigatsionnye sputnikovye sistemy [Global navigation satellite systems]. Moscow, MGТУ im. N.E. Bauman Publ., 2008. 182 p.
- [2] Perov A.I., Kharisov V.N. GLONASS. Printsipy postroeniya i funktsionirovaniya [GLONASS. The principles of construction and operation]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005. 688 p.
- [3] Shakhhtarin B.I., Sizykh V.V., Sidorkina Yu.A. Sinkhronizatsiya v radiosvyazi i radionavigatsii [Synchronization in radio communication and navigation]. Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom Publ., 2011. 278 p.
- [4] Van Nee. R., Prasad R. OFDM in wireless multimedia communications. London, Artech House, 2000. 260 p.
- [5] Bahai A.R.S., Saltzberg B.R., Ergen M. Multi-carrier digital communications theory and applications of OFDM. N.Y., Springer, 2004. 411 p.
- [6] Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. Vol. 1. Phase, frequency – locked loops, and amplitude control. N.Y., John Wiley, 1990. 510 p.
- [7] Stephens D.R. Phase – locked loops for wireless communications. Digital, analog and implementations. N.Y.–Moscow, Kluwer Ac. Publ. 2002. 421 p.
- [8] Shakhhtarin B.I. Statisticheskaya dinamika sistem sinkhronizatsii [Statistical dynamics of synchronization systems]. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1998. 488 p.
- [9] Shakhhtarin B.I. Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh [Analysis of synchronization systems with interference]. Moscow, IPRZhR Publ., 1996. 252 p.

- [10] Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. Vol. 1. Phase, frequency – locked loops, and amplitude control. N.Y., John Wiley, 1990. 510 p.
- [11] Tikhonov V.I. The influence of noise on the work of a phase-locked loop. *Avtom. Telemekh.* [Autom. Remote Control], 1959, no. 9, pp. 1188–1196 (in Russ.).
- [12] Stratonovich R.L. *Izbrannye voprosy teorii fluktuatsiy v radiotekhnike* [Selected problems of the fluctuation theory in radio engineering]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1961. 558 p.
- [13] Shakhtarin B.I. Analysis of asymptotic static characteristics of PLLs. *Radiotekh. Elektron.* [Radio Eng. Electron.], 1968, no. 2, pp. 246–258 (in Russ.).
- [14] Tikhonov V.I., Shakhtarin B.I. Statistical characteristics of the phase-locked loop. *Avtom. Telemekh.* [Autom. Remote Control], 1965, no. 9, pp. 1563–1572 (in Russ.).
- [15] Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 709 p.
- [16] Chie C.M. Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loop in white Gaussian noise. *IEEE Trans.*, 1978, vol. COM-26, no. 6, pp. 860–865.
- [17] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 200 p.

Статья поступила в редакцию 14.11.2012

Борис Ильич Шахтарин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области радиотехники, статистического анализа, фазовой синхронизации, формирования и обнаружения сигналов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

B.I. Shakhtarin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of radio engineering, statistical analysis, phase synchronization, formation and detection of signals.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Тагирбек Гайдарбекович Асланов — аспирант кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ по сейсмологии, локации и синхронизации.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

T.G. Aslanov — post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of seismology, radar and synchronization.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.