

УДК 629.78.086

Ф. В. З в я г и н

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРБИТ В ЗАДАЧАХ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

На примере систем Солнце–Земля–КА и Солнце–Земля–Луна–КА рассматривается класс орбит, охватывающих коллинеарные точки либрации и расположенных между Солнцем и Землей. Проработан вопрос устойчивости орбит данного класса как в случае ограниченной эллиптической задачи трех тел, так и в случае бициркулярной задачи четырех тел.

E-mail: pk-bmstu@ya.ru

Ключевые слова: задача трех тел, возвраты Пуанкаре, ляпуновские показатели.

Постановка задачи. Уравнения движения. В классической работе В. Себехея [1, с. 466] представлен класс орбит f так называемой Копенгагенской категории, существующих в области между двумя притягивающими телами и имеющих разные характеристики устойчивости. Указанный класс орбит может быть определен не только в случае равенства масс основных притягивающих тел, но и при другом их соотношении, например в системе тел Солнце–Земля–Луна. Численное исследование уравнений задач трех и четырех тел позволяет определить важнейшие характеристики данных орбит, такие как их период, устойчивость, область существования.

Уравнения движения ограниченной эллиптической задачи трех тел могут быть записаны в пульсирующих координатах. Пусть $Gxyz$ — неравномерно вращающаяся барицентрическая прямоугольная система координат, плоскость Gxy которой совпадает с плоскостью орбит конечных масс, направление оси Gx совпадает с направлением P_0P_1 (P_0 — материальная точка массой $1 - \mu$, P_1 — материальная точка массой μ), ось Gz перпендикулярна плоскости движения основных тел, а ось Gy дополняет систему координат до правой. Примем, что $|P_0P_1| = 1$, сумма масс возмущающих тел равна единице, постоянная тяготения $f = 1$. Система уравнений, описывающих поведение тела P [2, с. 549], имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \frac{\partial U}{\partial x}; \\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \frac{\partial U}{\partial y}; \\ \frac{d^2z}{d\vartheta^2} = \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$U = \frac{1}{2} [x^2 + y^2 - z^2 e \cos \vartheta] + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2};$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}; \quad \rho_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}.$$

Переход от истинной аномалии ϑ тела массой μ к времени t осуществляется с помощью равенства

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{p^{\frac{3}{2}}},$$

где e, p — эксцентриситет и параметр конического сечения.

Уравнения движения бикруговой задачи четырех тел во вращающейся системе координат [3, с. 24] записываются исходя из предположения, что три притягивающих тела обращаются относительно друг друга в одной плоскости, попарно, по круговым траекториям относительно их барицентров. Центр системы координат располагается в барицентре системы двух меньших притягивающих тел. Это позволяет таким образом учитывать влияние наиболее массивного тела как возмущение, вносимое в круговую задачу трех тел. При проведении численных расчетов в качестве основных притягивающих тел рассматриваются Солнце, Земля и Луна. В этом случае движение четвертого тела P описывается уравнениями движения:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + y; & \dot{y} = p_y - x; & \dot{z} = p_z; \\ \dot{p}_x = p_y - \frac{1 - \mu}{r_{pe}^3} (x - \mu) - \frac{\mu}{r_{pm}^3} (x - \mu + 1) - \frac{m_s}{r_{ps}^3} (x - x_s) - \frac{m_s}{a_s^2} \cos \theta; \\ \dot{p}_y = -p_x - \frac{1 - \mu}{r_{pe}^3} y - \frac{\mu}{r_{pm}^3} y - \frac{m_s}{r_{ps}^3} (y - y_s) + \frac{m_s}{a_s^2} \sin \theta; \\ \dot{p}_z = -\frac{1 - \mu}{r_{pe}^3} z - \frac{\mu}{r_{pm}^3} z - \frac{m_s}{r_{ps}^3} z, \end{cases} \quad (2)$$

где расстояния от тела P до Земли, Луны и Солнца соответственно определяются по формулам

$$\begin{aligned} r_{pe}^2 &= (x - \mu)^2 + y^2 + z^2; \\ r_{pm}^2 &= (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2; \\ r_{ps}^2 &= (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Координаты Солнца вычисляются согласно формулам

$$x_s = a_s \cos \theta, \quad y_s = -a_s \sin \theta.$$

Переход к времени осуществляется по формуле $t = \theta/\omega_s$. Числовые значения постоянных приняты следующими: $\mu = 0,0121505816$, $a_s = 388,8114$, $m_s \cong 328900,54$, $\omega_s = 0,925195985520347$.

Устойчивость. Существует несколько определений понятия “устойчивость”, применяемых к анализу различных реализаций приведенных систем. Определение устойчивости по Лагранжу относится к

отдельно взятой фазовой траектории и может быть сформулировано следующим образом: фазовая траектория $x(t)$ устойчива по Лагранжу, если состояние $x(t)$ при всех $t > 0$ остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. Другим определением устойчивости отдельно взятой фазовой траектории, не являющейся неподвижной точкой, является определение устойчивости по Пуассону. Устойчивой по Пуассону будет траектория, которая возвращается в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Возвраты траектории в ε -окрестность произвольно выбранной точки называются возвратами Пуанкаре. Для периодических траекторий возвраты Пуанкаре происходят через промежуток времени, равный периоду этих траекторий. В случае квазипериодических траекторий время между возвратами зависит от ε . Для траекторий, проявляющих признаки хаотического движения, возвраты Пуанкаре носят нерегулярный характер.

В случае, когда необходимо исследовать устойчивость фазовых траекторий, изначально близко расположенных, используется определение устойчивости по Ляпунову. Траектории $x(t)$ и $y(t)$ устойчивы, когда для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta > 0$, что для любой точки старта y_0 из δ -окрестности точки x_0 , т.е. при $\|x_0 - y_0\| < \delta$, для всех $t > 0$ $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$.

Определение устойчивости по Ляпунову приводит к методу количественной оценки устойчивости по линейному приближению, основанному на теореме Ляпунова. Теорема утверждает, что для любого решения уравнения $\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x}$ (где $\tilde{x}(t)$ задает возмущение исходной траектории $x(t)$, A — матрица, составленная из частных производных от компонент невозмущенного решения по компонентам вектора x) можно определить ляпуновский характеристический показатель, дающий численную оценку изменения во времени возмущения $\tilde{x}(t)$ [4, с. 140]:

$$\Lambda_{\tilde{x}(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{x}(T)\|. \quad (3)$$

При размерности фазового пространства N (размерность функции возмущения равна N) существует N ляпуновских показателей, называемых спектром. Наибольший показатель из спектра называется старшим.

В линейном приближении возмущение исходной траектории эволюционирует во времени как $e^{\Lambda t}$, т.е. при положительности ляпуновского показателя фазовая траектория является неустойчивой. Равенство нулю ляпуновского показателя говорит о периодическом характере фазовой траектории, отрицательность — о ее асимптотической устойчивости.

Численное определение спектра ляпуновских показателей строится на применении процедуры ортогонализации Грама–Шмидта

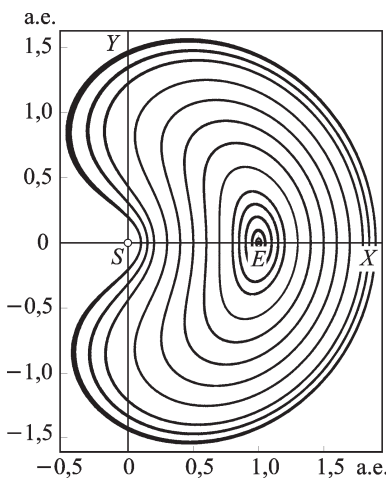


Рис. 1. Семейство орбит

продолжительность указанного времени существования орбит составляет от 40 модельных лет и больше, можно считать, что эти орбиты имеют признаки устойчивости по Лагранжу.

к векторам возмущений номинальной траектории и суммированием накопленных за некоторое расчетное время отклонений и последующем вычислении показателя, как описано, например, в работе [4, с. 155].

Результаты численного исследования. На рис. 1 приведен вид семейства орбит в проекции на плоскость обращения притягивающих тел. Численное моделирование показывает, что орбиты всех видов достаточно долгое время, отличное, впрочем, от бесконечности, остаются в некоторой ограниченной области. Принимая во внимание, что

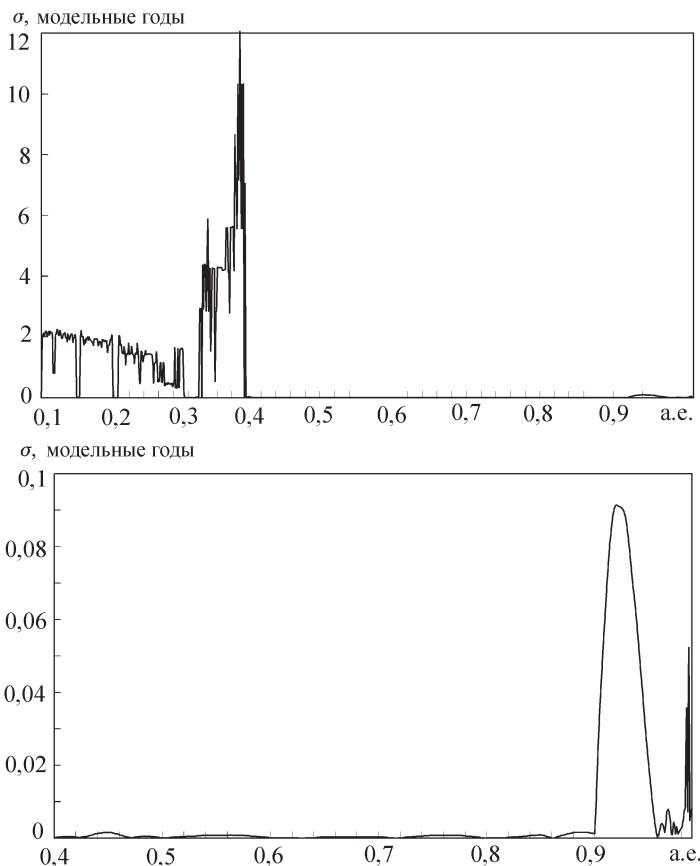


Рис. 2. Среднее квадратическое отклонение времени возвратов Пуанкаре

На рис. 2 представлены результаты расчета среднеквадратического отклонения времени возвратов Пуанкаре в окрестность точки пересечения фазовой траекторией оси x . Верхний график дает представление об указанном параметре для всего семейства орбит, нижний — для отрезка $[0,4; 0,999]$ оси x . Период орбит, пересекающих отрезок $[0,4; 0,96]$ близок к 2π модельных лет. Орбиты, лежащие ближе к меньшему притягивающему телу, имеют меньший период обращения. Таким образом, в достаточно широкой области рассматриваемого фазового пространства существуют устойчивые по Пуассону орбиты.

Результаты численного определения спектра ляпуновских показателей для исследуемого класса орбит приведены на рис. 3 в виде графика изменения спектра для орбит, пересекающих отрезок оси x $[0,4; 0,999]$ (рис. 3, *а*). На рис. 3, *б* тот же график показан для орбит из отрезка $[0,82; 0,831]$, на рис. 3, *в* — для орбит, лежащих внутри коллинеарных точек либрации. В последнем случае расчет проводился как интегрированием уравнений движения задачи трех тел (1), так и интегрированием уравнений движения бикруговой задачи четырех тел (2). Определение спектра ляпуновских показателей проводилось на основе выражения (3) для орбит, лежащих за коллинеарными точками либрации, через 0,0005 а.е., а для орбит, лежащих внутри коллинеарных точек либрации, шаг был уменьшен до 0,0001 а.е. Расчет показателей проводился с использованием 75 случайных возмущений номинальной траектории для орбит, лежащих за коллинеарными точками, и с использованием 175 — для орбит, лежащих во внутренней области.

Из графика изменения спектра ляпуновских показателей следует, что:

— для орбит, лежащих за коллинеарными точками либрации, $\Lambda_z < 0$, т.е. указанные орбиты асимптотически устойчивы вдоль оси z . Во внутренней области это соотношение не выполняется и орбиты не являются устойчивыми вдоль указанной оси;

— существует область фазового пространства, границей которой можно условно считать отрезок $[0,8215; 0,8305]$. Для орбит из этой области ляпуновские показатели имеют глобальные минимумы. График суммы спектра ляпуновских показателей приведен на рис. 4. Погрешность вычислений ляпуновских показателей приводит к тому, что в нескольких точках этот график имеет отрицательные значения, что не свойственно консервативным системам, а в диссипативных системах указывает на присутствие аттрактора — области притяжения фазовых траекторий. В описываемой области фазового пространства старшим показателем является Λ_x , что не характерно для других областей. Ляпуновские показатели, с точностью до ошибок их численного определения, можно считать нулевыми, однако расчет возвратов Пуанкаре показывает, что они все же положительны. Пример для орбиты, лежащей в данной области, приведен на рис. 5; графики возмущений вдоль всех осей имеют ярко выраженный периодический характер;

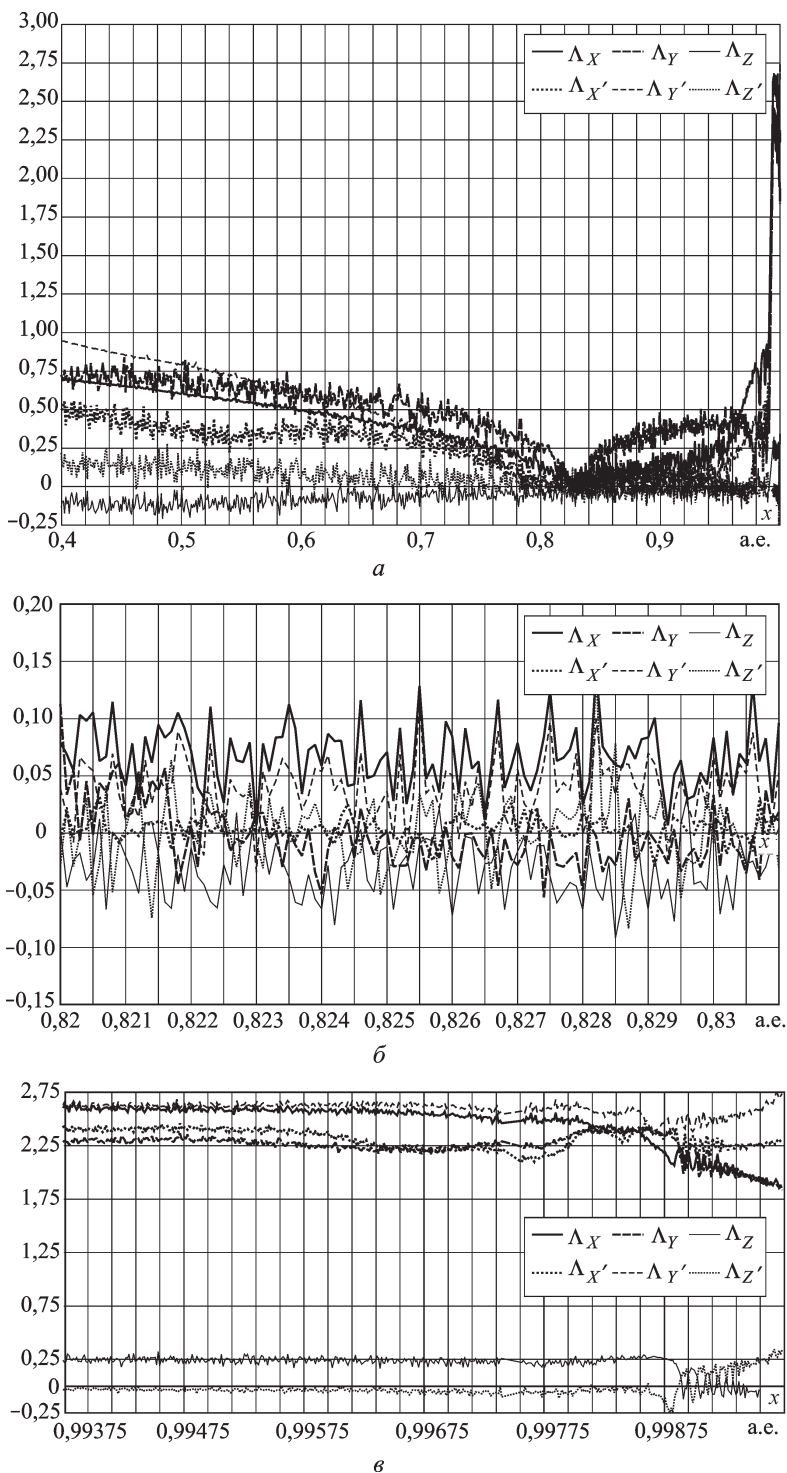


Рис. 3. Спектр ляпуновских показателей для области, характеризующейся минимальным среднеквадратическим отклонением времени возвратов Пуанкаре (а), для области минимумов ляпуновских показателей (б) и области внутри коллинеарных точек либрации (в)

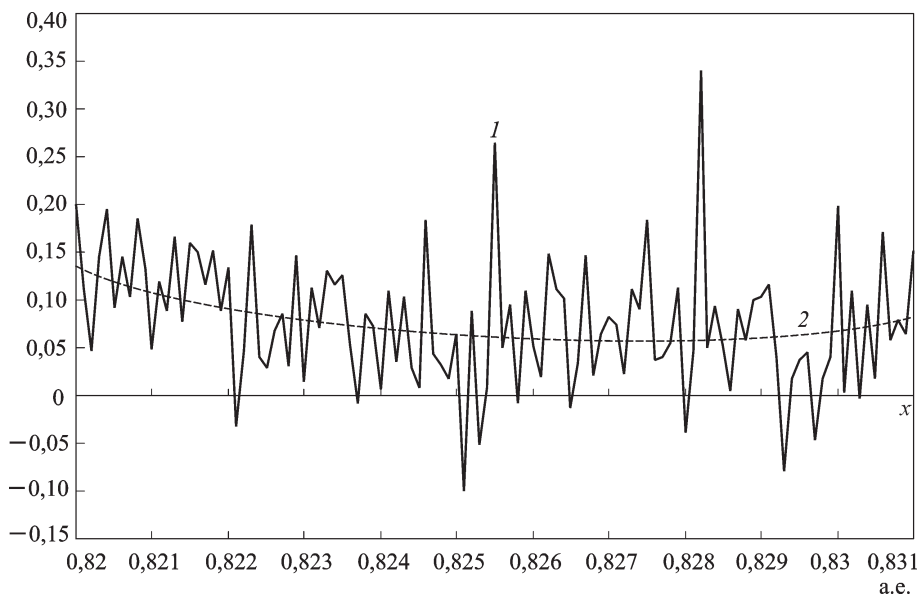


Рис. 4. Сумма ляпуновских показателей (1) и ее среднее (2) для области минимальных значений ляпуновских показателей

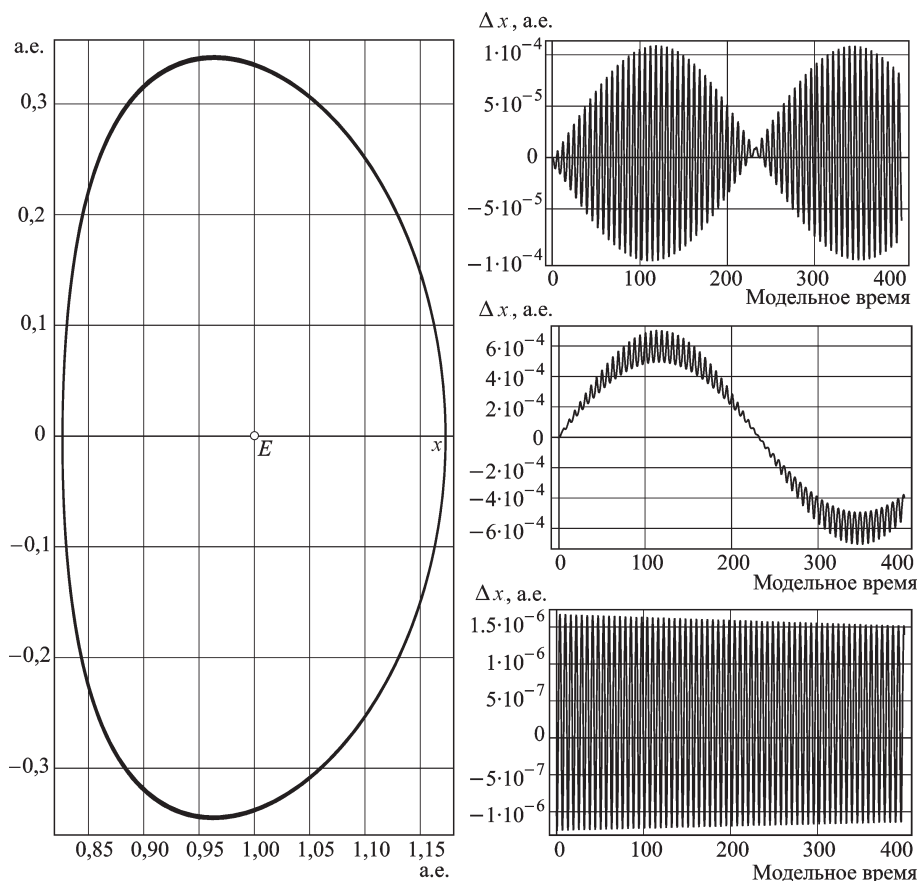


Рис. 5. Орбита исследуемого класса из области минимумов ляпуновских показателей и временные характеристики ее возмущений

график возмущения вдоль оси z указывает на устойчивость орбиты;

— область между коллинеарной точкой и меньшим притягивающим телом характеризуется резким ростом ляпуновских показателей, т.е. бóльшей неустойчивостью орбит исследуемого класса как в задаче трех тел, так и в задаче четырех тел. Пример орбиты, лежащей в этой области, приведен на рис. 6 — видно плотное заполнение области фазового пространства, в которой локализована орбита, графики возмущений по осям имеют заметную долю случайной составляющей — это является отражением положительности ляпуновских показателей. Следует отметить, что направление движения по орбитам внутри коллинеарных точек либрации противоположно направлению движения в этой области космических аппаратов.

Выводы. Проведенное исследование показало, что в системе Солнце–Земля–Луна существует класс орбит, устойчивых по Лагран-

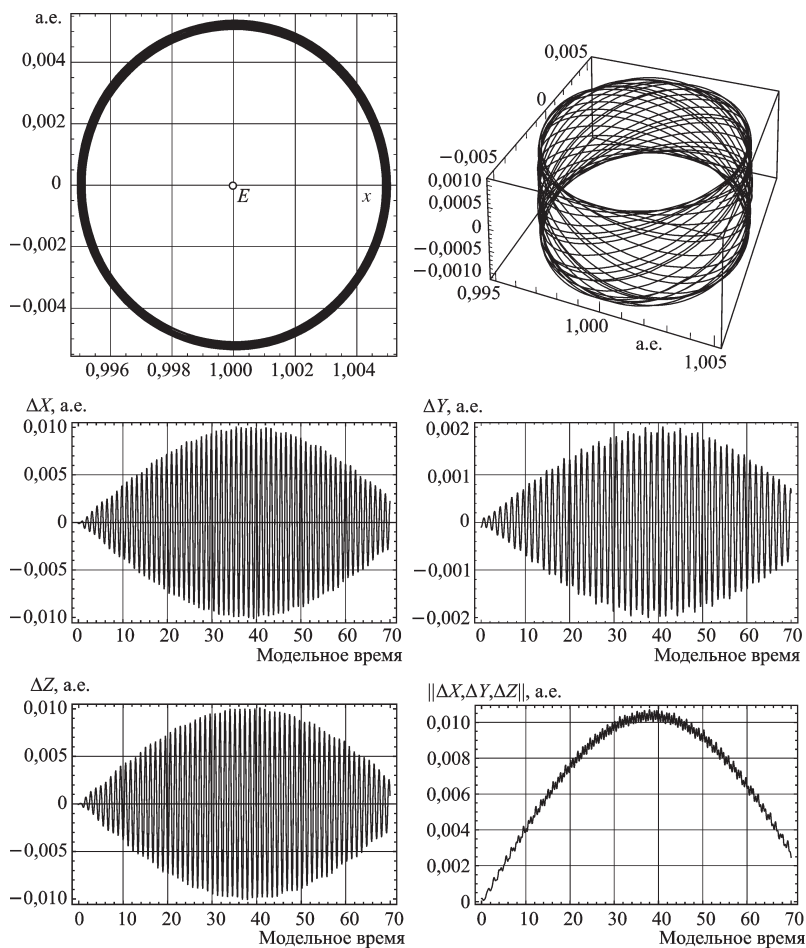


Рис. 6. Орбита исследуемого класса, расположенная внутри коллинеарных точек либрации и временные характеристики ее возмущений

жу, внутри которого можно выделить подкласс орбит, устойчивых по Пуассону. Период обращения по данным орбитам близок к 2π модельных лет. Общее время существования указанных орбит при численном исследовании составляло более 400 модельных лет. Важнейшими свойствами орбит является их асимптотическая устойчивость вдоль оси z и общая ограниченность области существования.

Указанные свойства позволяют использовать данные орбиты для построения различных космических группировок продолжительного времени существования, таких как радиотелескопы-интерферометры с высокой разрешающей способностью или группировки автоматических станций. Кроме того, возможно использование орбит данного класса для исследования околопланетного пространства с посещением окрестностей коллинеарных точек либрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С е б е х е й В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / Пер. с англ. под ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
2. С п р а в о ч н о е руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребеников и др. Под ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
3. A n d r e u M. A. The quasi-bicircular problem / Departament de matematica aplicada i analisi, Universitat de Barcelona, 1998. – 199 с.
4. К у з н е ц о в С. П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.

Статья поступила в редакцию 19.02.2010

Феликс Валерьевич Звягин родился в 1970 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1993 г. Старший преподаватель кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области исследования задач трех и четырех тел с применением методов теории динамических систем.

F.V. Zvyagin (b. 1970) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1993. Senior teacher of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of study of three- and four-body problems with application of methods of theory of dynamical systems.

