УДК 531 DOI: 10.18698/0236-3933-2017-2-77-85

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

В.Ф. Журавлёв Zhurav@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Понятие корректной постановки начальной и краевой задач для уравнений в частных производных было введено Адамаром. Он же и привел первый пример некорректной постановки задачи для конкретного уравнения в частных производных. Между тем примеров некорректной постановки задачи в любых разделах механики много. Адамар и некоторые его последователи считали, что некорректная постановка задачи лишена физического смысла, и такие задачи не следует ставить. Приведено несколько примеров некорректных постановок задач. Показано, что если задача имеет прикладной характер, то преодоление некорректности в математическом плане может помогать в улучшении конструкции на практике, что оправдывает изучение некорректных задач

Ключевые слова

Некорректные задачи, сухое трение, флаттер

Поступила в редакцию 07.12.2016

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-19-01633)

Определение корректной постановки задачи. Задача механики называется *корректно поставленной* [1, 2], если:

- решение этой задачи существует;
- это решение единственно;
- при малом изменении параметров изучаемой модели, начальных и краевых условий решение также меняется мало.

Пример отсутствия решения (тормозная колодка [3]). Рассмотрим механизм, приведенный на рис. 1. Тормозная колодка, шарнирно прикрепленная к основанию в точке O', прижимается силой P к диску, имеющему свободу вращения вокруг точки O''. Диск при поднятой колодке может свободно вращаться с произвольной угловой скоростью в любом направлении. Пусть колодка опущена и взаимодействует с диском силами нормальной реакции $N \geq 0$ и сухого трения по Кулону F:

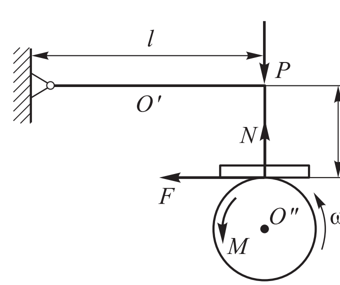

Рис. 1. Схема взаимодействия тормозной колодки и диска

$$0 \le F \le fN. \tag{1}$$

Требуется найти нормальную реакцию N, которая (по постановке задачи) отрицательной быть не может.

Приведем решение этой задачи, как оно представлено в многочисленных источниках, посвященных тормозной колодке.

Уравнение равновесия колодки (уравнение моментов вокруг точки O'):

$$-Fh + (N - P)l = 0. \tag{2}$$

Предположим, что диск вращается в положительном направлении. Тогда

$$F = fN \tag{3}$$

и, подставляя (3) в (2), находим искомую реакцию

$$N = \frac{Pl}{l - fh}. \tag{4}$$

Это решение имеет смысл, если $l - fh > 0.$ Если же

$$l - fh < 0, \tag{5}$$

то реакция отрицательна, что невозможно, поскольку связь между колодкой и диском односторонняя. Получается, что для каких-то соотношений параметров задачи реакцию определить нельзя. Это ставит под вопрос применимость законов механики для этого случая. Именно так и характеризовал ситуацию П. Пенлеве, когда говорил, что законы сухого трения противоречат законам механики. Позиция П. Пенлеве была подвергнута критике Феликсом Клейном. Последователи П. Пенлеве неизменно описывают возникшую проблему, как «парадоксальную».

Приведенное решение между тем является ошибочным. Ошибка состоит в том, что прежде, чем предполагать, что вращение диска возможно и использовать выражение (3), следовало установить, когда такое условие справедливо и не противоречит законам трения.

Приведем правильное решение.

Наряду с (2) рассмотрим и уравнение равновесия диска

$$M - FR = 0, \tag{6}$$

где R — радиус диска. Из уравнений (2) и (6) находим искомую реакцию

$$N = P + \frac{Mh}{Rl}. \tag{7}$$

В отличие от (4) реакция (7) определена при любых значениях параметров. Рассмотрим «подозрительный» случай (5). Разделим обе части равенства (7) на F и запишем:

$$\frac{N}{F}=\frac{P}{F}+\frac{h}{l}>\frac{P}{F}+\frac{1}{f}. \tag{8}$$

При получении неравенства (8) использовано неравенство (5). Выполним теперь инверсию неравенства (8):

$$\frac{F}{N}<\frac{Ff}{fP+F}<\frac{Ff}{F}=f, \tag{9}$$

что означает $F<fN$, а это есть условие (1) того, что диск неподвижен.

Тормозная колодка (см. рис. 1) при условии $l>fh$ притормаживает вращающийся диск, при условии же (5) этот механизм играет роль клинового стопора. Клиновый стопор — механический аналог полупроводника: при $\omega>0$ вращение диска невозможно из-за эффекта заклинивания пары диск–колодка, при $\omega\le 0$ заклинивания нет, вращение возможно с любой скоростью.

Во всех случаях выражение для нормальной реакции имеет вид (7). Попытки преодолеть заклинивание увеличением момента M могут привести только к поломке механизма при превышении реакцией N предела прочности конструкции.

Ничего «парадоксального» в поведении тормозной колодки нет, вопреки мнению. П. Пенлеве и некоторых его последователей, нет и противоречия между законами механики и законами трения.

Пример нарушения корректности из-за невыполнения второго условия в определении Адамара (нет единственности). Чаще всего решение бывает неединственным в так называемых обратных задачах механики. Это такие задачи, когда искомые и заданные переменные меняются местами. Например, в задачах теории колебаний прямая задача может состоять в нахождении спектра колебаний при заданных параметрах колебательной системы. В обратной задаче по заданному спектру требуется найти такие параметры системы, для которых у нее будет этот спектр.

Обзор результатов в этой области приведен в [4].

Наибольший интерес представляют задачи, в которых при сколь угодно малом изменении параметров задачи решение меняется сильно и часто даже качественно.

Пример некорректной постановки задачи, когда решение не является непрерывно зависящим от параметров — пример Адамара. (Этот пример приведен Адамаром впервые на конгрессе швейцарского математического общества в Цюрихе в 1917 г.). Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

со следующими данными:

$$u(0,y)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=A_n\sin ny,$$

где n — очень большое число, а A_n — функция, которая очень мала, когда n становится очень большим (например, $A_n=1/n$). Эти данные как угодно близки к нулю. Однако такая задача Коши имеет решение

$$u = \frac{A_n}{n} \sin ny \,\mathrm{sh} nx,$$

которое очень велико вследствие неограниченного роста $\mathrm{sh} nx$ каким бы ни было n.

Пример, приведенный Адамаром, выбран им из области краевых задач математической физики. Между тем некорректные (в смысле Адамара) постановки задач нередко встречаются в любой области механики. Далее приводятся три примера.

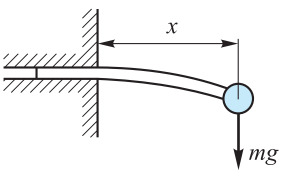

Рис. 2. Схема заделки балки с грузом

Примеры некорректных задач из других областей. Пример 1. Рассмотрим тонкую упругую невесомую балку, одним концом вставленную без зазора в горизонтальную щель в стенке (рис. 2). На другом конце балки имеется груз массой m, на который по вертикали действует сила тяжести. В щели нет трения, и балка может свободно перемещаться в горизонтальном направлении (обобщенная координата x). В этой задаче требуется узнать, будет ли меняться x, если $x(0) = l$, $\dot{x}(0) = 0$. Проще говоря, вылезет ли балка из щели с нулевой начальной скоростью?

Будем решать эту задачу двумя методами.

Метод Ньютона. Все действующие в этой модели силы имеют нулевую проекцию на ось x. Горизонтальная проекция реакции заделки равна нулю:

$$R_x = 0,$$

поэтому положение равновесия $x \equiv \mathrm{const}$ является безразличным. Ответ: балка остается неподвижной.

Метод Лагранжа. Вычислим потенциальную энергию балки, состоящую из энергии ее деформированного состояния и из потенциальной энергии груза массы m. В сумме получаем

$$\Pi = -\frac{(mg)^2 x^3}{6EJ}.$$

Потенциальная энергия системы есть монотонно убывающая функция x, ни при каком x, не равном нулю, равновесие невозможно. Горизонтальная составляющая реакции

$$R_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{(mgx)^2}{2EJ} > 0.$$

Силовой подход к решению задачи оказался противоречащим энергетическому подходу. В чем дело?

Разрешение парадокса. Вернемся к методу Ньютона, однако на этот раз учтем наличие неизбежного зазора $\Delta \neq 0$ между стенками щели и балкой (рис. 3). В этом случае реакция щели в угловой точке направлена по нормали к балке в точке контакта и ее проекция на ось x не равна нулю. Пользуясь методами сопротивления материалов, нетрудно вычислить значение этой проекции:

$$R_x = \left(mg(x+\delta)\right)^2 \big/ (2EJ).$$

Устремляя к нулю Δ, находим

$$\lim_{\Delta\to 0} R_x(\Delta) = \frac{(mgx)^2}{2EJ},$$

что в точности совпадает с выражением, полученным методом Лагранжа.

Таким образом, выясняется, что при силовом подходе (метод Ньютона) предел горизонтальной составляющей реакции щели не совпадает со значением этой реакции в предельной точке: $\lim\limits_{\Delta\to 0} R_x(\Delta) \neq R_x(0)$ (рис. 4). Решение рассматриваемой задачи силовым методом для нулевого зазора является некорректным по Адамару. Учет сколь угодно малого зазора приводит к изменению решения на конечную величину.

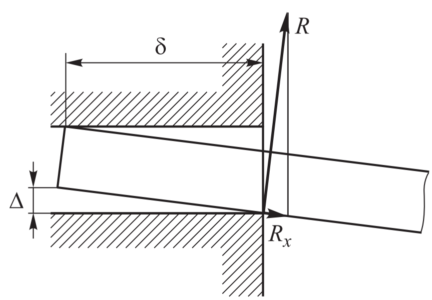

Рис. 3. Модельная схема

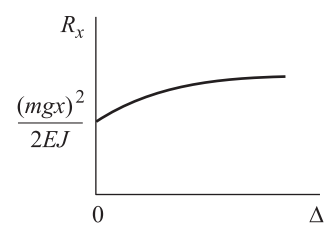

Рис. 4. Зависимость реакции R_x от зазора Δ

Отметим, что вертикальная составляющая реакции при $\Delta \to 0$ стремится к бесконечности: $R_x(\Delta) \to \infty$. Два реализованных подхода к решению в методе Ньютона отражают два взгляда в математике на понятие «бесконечность» — актуальная бесконечность (Кантор) и потенциальная бесконечность (Кронекер) [5]. Актуальной бесконечности соответствует задача в случае $\Delta = 0$, а предел $\Delta \to 0$ реализует понятие потенциальной бесконечности. В методе Лагранжа различий в этих подходах не возникает.

Пример 2. Задача Кориолиса [6] (рис. 5). Рассматривается динамика весомого шара на горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения. Вектор силы трения в точке O подчиняется условиям $\tau \neq 0$ =>,

- если $\Omega \neq 0$, то $V_0 \neq 0$;
- если $\Omega = 0$, то $V_0 \neq 0$ при условии $fN - |\tau| < 0$.

В начальный момент в точке контакта шар проскальзывает со скоростью V_0 и имеет угловую скорость верчения ω вокруг нормали в точке контакта. Требуется определить, когда проскальзывание закончится и шар перейдет в режим чистого качения. Решение, найденное Кориолисом в предположении точечного контакта, таково: угловая скорость верчения не изменяется $\omega \equiv \text{const}$, а проскальзывание в точке имеет место в течение промежутка времени $T = 2V_0/(7fg)$, где f — коэффициент сухого трения по Кулону, а g — ускорение свободного падения.

Решение этой задачи в форме Кориолиса является некорректным по Адамару, поскольку учет сколь угодно малого, но отличного от нуля пятна контакта, приводит к радикальным изменениям в решении [7, 8]. Так, выясняется, что верчение и скольжение заканчиваются одновременно, и время до обнуления соответствующих скоростей $T\big|_{\varepsilon\neq 0} \simeq \dfrac{32u_0R^2}{15\pi fg\varepsilon^2}$, где $u_0 = \omega R$, а R — радиус шара. Сколь угодно малая величина ε представляет собой радиус пятна контакта.

В этом примере, в отличие от предыдущего, сколь угодно малое изменение условий некорректно поставленной задачи приводит к сколь угодно большому изменению в решении (рис. 6).

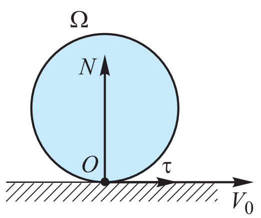

Рис. 5. К задаче Кориолиса

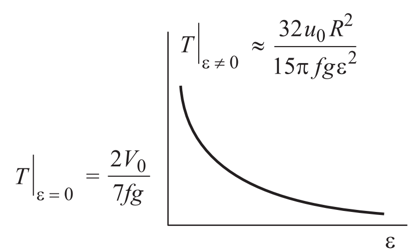

Рис. 6. Зависимость времени T от радиуса пятна контакта ε

Пример 3. Задача о флаттере [9, 10]. Не вдаваясь в детали вывода уравнений колебаний двумерной упругой системы при наличии циркулярных сил, приведем эти уравнения к следующей простейшей форме, учтя дополнительно и диссипативные силы $F_x = h_1\dot{x}$, $F_y = h_2\dot{y}$:

$$a\ddot{x} + h_1\dot{x} + x + ey = 0;$$
$$b\ddot{y} + h_2\dot{y} + y - ex = 0.$$

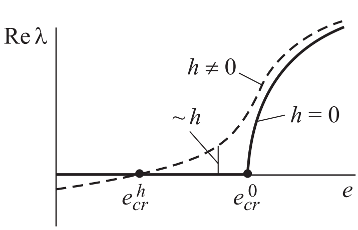

Рис. 7. Характеристические корни СДУ

В задачах об аэроупругих колебаниях элементов оперения самолетов диссипативные силы часто не учитываются из-за их малости по сравнению с упругими и аэродинамическими силами. На рис. 7 показана зависимость максимальной по модулю вещественной части характеристических корней изучаемой системы дифференциальных уравнений (СДУ) от коэффициента e, представляющего циркулярные силы. Эти силы, монотонно возрастающие с увеличением скорости набегающего потока, характеризуют скоростной напор. Сплошной линией показана зависимость без учета диссипативных сил и штриховой линией — с учетом этих сил. При стремлении $(h_1, h_2) \to 0$ штриховая линия непрерывно вливается в сплошную. При этом точка пересечения ее с осью абсцисс определяет границу области устойчивости. Положение этой точки в пределе зависит от характера стремления к нулю диссипативных коэффициентов, и оно может быть в любом месте отрезка $(0,\ e_{cr}^0)$. Таким образом, какой бы малой ни была диссипация, она меняет предел устойчивости на конечную величину. Это и означает, что постановка задачи об исследовании устойчивости без диссипативных сил некорректна по Адамару. Исчезающе малая диссипация может устойчивую систему превратить в неустойчивую. При этом предел величины e_{cr}^h, определяющей границу области устойчивости по совокупности переменных $(h_1, h_2) \to 0$, не существует, поскольку частичные пределы не совпадают. Так, если $h_1 = ah$, $h_2 = bh$ и $h \to 0$, то $e_{cr}^h \to e_{cr}^0$. Если же по одной координате диссипация много больше, чем по другой, например, $h_1 = h$, а $h_2 = h^3$, то при $h \to 0$ $e_{cr}^h \to 0$.

Из этого примера следует, что анализ причин некорректности по Адамару постановки задач с отсутствием диссипации позволяет при конструировании системы вводить искусственно диссипацию так, чтобы максимально приблизить границу неустойчивости к точке e_{cr}^0 (максимально достижимая область устойчивости). Следует также заметить, что если $e \in (e_{cr}^h,\ e_{cr}^0)$, то неустойчивость носит «мягкий» характер, поскольку вещественная часть корня имеет порядок h. Если же $e > e_{cr}^0$, то неустойчивость носит «взрывной» характер, поскольку вещественная часть корня уже не является малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351с.

2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.

3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59. № 3. С. 366 –375.

4. *Глэдвилл Г.М.Л.* Обратные задачи теории колебаний. Москва–Ижевск: НИЦ РХД, 2008. 607 с.

5. *Медведев Ф.А.* Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982. 305 с.

6. *Кориолис Г.* Математическая теория явлений биллиардной игры. М.: ЛКИ, 2007. 240 с.

7. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

8. *Журавлёв В.Ф.* Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 1–5. URL: http://mtt.ipmnet.ru/ru/Issues.php?n=6&p=3&y=2006

9. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. М.: Физматлит, 2009. 399 с.

10. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420 с.

Журавлёв Виктор Филиппович — д-р физ.-мат. наук, профессор, академик Российской академии наук, главный научный сотрудник ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН (Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Журавлёв В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2. С. 77–85. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-2-77-85

UNCORRECT PROBLEMS IN MECHANICS

V.F. Zhuravlev Zhurav@ipmnet.ru

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract

The concept of uncorrect statement of initial and boundary value problems for partial differential equations (PDE) was introduced by Hadamard. He presented the first example of an uncorrect statement of the problem for a specific PDE. Meanwhile, examples of uncorrect statement of the problem exist in all branches of mechanics. Hadamard and some of his followers believed that an uncorrect statement of the problem does not make physical sense and such problems should not be solved. This paper gives some examples of uncorrect statements of mechanics problems. It also shows that if a problem has an applied character, the overcoming of uncorrectness in mathematical sense can help to improve the design in practice. The latter fact may justify the studying of uncorrect problems

Keywords

Uncorrect problems, dry friction, flutter

REFERENCES

[1] Adamar Zh. Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa [Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolical nature]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p.

[2] Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 436 p.

[3] Neymark Yu.I., Fufaev N.A. Paradoksy Penleve i dinamika tormoznoy kolodki. Painleve paradoxes and brake shoe dynamics. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1995, vol. 59, no. 3, pp. 366–375 (in Russ.).

[4] Gladwell Gr.M.L. Inverse problems in vibration. Springer Netherlands, 2005. 457 p. (Russ. ed.: Obratnye zadachi teorii kolebaniy. Moscow–Izhevsk, NITs RKhD Publ., 2008. 607 p.).

[5] Medvedev F.A. Rannyaya istoriya aksiomy vybora [Early history of selection axiom]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 305 p.

[6] Koriolis G. Matematicheskaya teoriya yavleniy billiardnoy igry [Mathematical theory of billiards game events]. Moscow, LKI Publ., 2007. 240 p.

[7] Neymark Yu.I., Fufaev N.A. Dinamika negolonomnykh system [Non-holonomic systems dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 519 p.

[8] Zhuravlev V.F. Dynamics of a heavy homogeneous ball on a rough plane. *Izv. RAN. MTT.* [Mechanics of Solids], 2006, no. 6, pp. 1–5 (in Russ.).
Available at: http://mtt.ipmnet.ru/ru/Issues.php?n=6&p=3&y=2006

[9] Maylybaev A.A., Seyranyan A.P. Mnogoparametricheskie zadachi ustoychivosti [Multiparameter buckling problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 399 p.

[10] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh system [Stability and oscillations of elastic system]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 420 p.

Zhuravlev V.F. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences (Vernadskiy prosp. 101, korp. 1, Moscow, 119526 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zhuravlev V.F. Uncorrect Problems in Mechanics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2017, no. 2, pp. 77–85. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-2-77-85